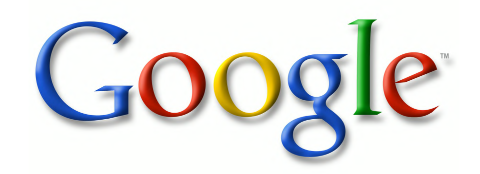
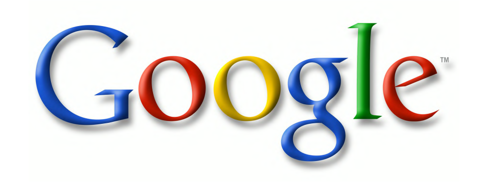






Hosted by Google

L'HYPERESPACE

A $(n-1)$ DIMENSIONS.

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE LA CORRÉLATION GÉNÉRALE,

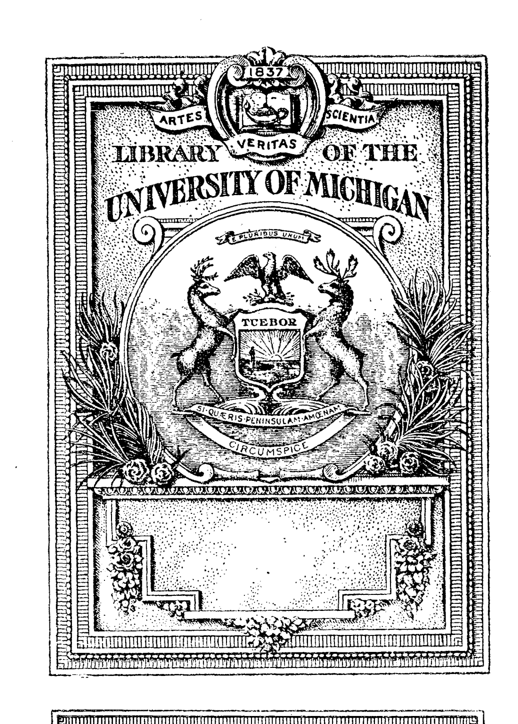
PAR G. FONTENÉ,

AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE ROLLIN.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

L'HYPERESPACE

A $(n-1)$ DIMENSIONS.

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DE LA CORRÉLATION GÉNÉRALE,

PAR G. FONTENÉ,
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE ROLLIN.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1892

L'HYPERESPACE

A $(n-1)$ DIMENSIONS.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
17817 Quai des Grands-Augustins, 55.

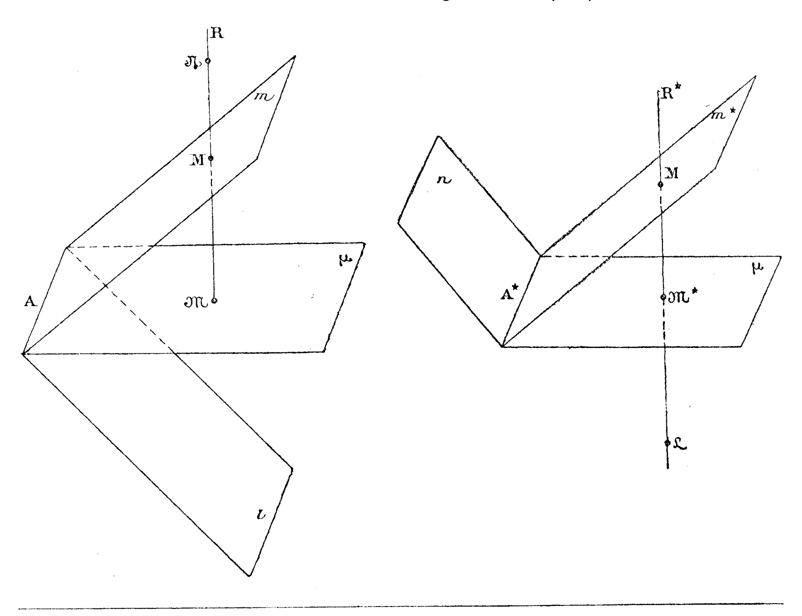
TABLE DES MATIÈRES.

17817 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

AVERTISSEMENT (¹).

Dans une étude sur l'hyperespace, les définitions sont faites en vue de théorèmes qui les expliquent : certains calculs, comme ceux du n° 38, s'éclairent par les résultats qu'on en tire ; je crois devoir faire, en me plaçant à ce point de vue, une revue rapide de l'Ouvrage. J'en profiterai pour mettre mieux en évidence quelques formules, et je conseille au lecteur de noter dès maintenant dans le corps de l'Ouvrage les passages qui correspondent à des formules portant un numéro dans l'Avertissement; je donnerai en même temps plusieurs figures schématiques indiquées dans le texte.

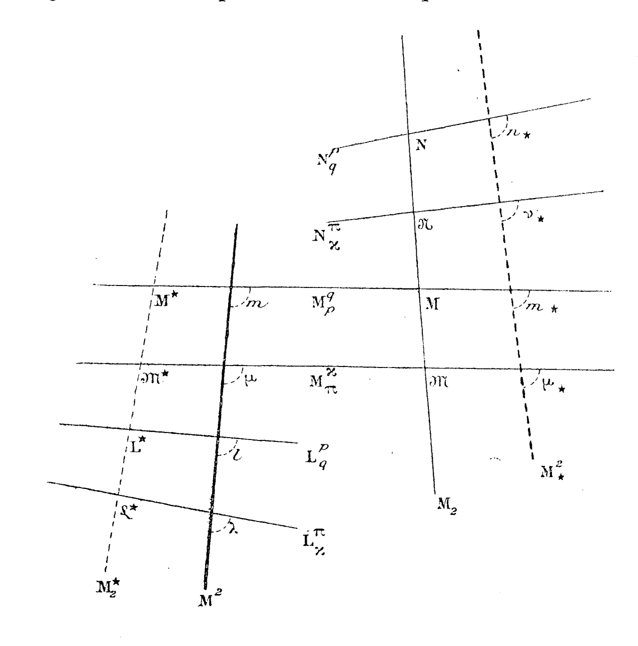
1. On considère une corrélation générale (18), et l'on a deux



(¹) *Voir* les Préliminaires, p. 1, 2 et 3, avant de lire l'Avertissement.

équationnelles doubles S et s (24); la pseudo-distance de deux points est $\overline{\mathrm{M}\mathfrak{M}} = \frac{1}{i}\log(\sqrt{\mathrm{R}})$, ... (78); chaque rayon a un paramètre θ, ... (82); le σ de deux points est donné par la dernière formule du n° 80, ... Un Δ est un σ ou un Σ (97), et l'on a les figures schématiques de la page v.

Pour deux éléments quelconques $\mathrm{M}_p^q\,\mathrm{M}_\pi^\varkappa$, on a les Δ principaux, avec la figure schématique suivante indiquée au n° 99 :



Le moment de deux éléments associables M_p^q, M_q^p est le produit des Δ principaux (110), et, quand on change l'ordre des deux éléments, le moment est multiplié par $(-1)^{pq}$; l'association de deux éléments est définie aux n°s 13 et 57. Voir au n° 171 une remarque sur le plan suivi dans l'Ouvrage.

Les coordonnées x d'un élément M_p^q sont indiquées au n° 10; je les donne ici, en y joignant les notations du n° 7 :

$$(1)\qquad x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}} = (\mathrm{M}_p^q, \mathrm{A}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}),\qquad \eta_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}} = (\mathrm{A}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}, \mathrm{A}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}),\qquad \mathrm{X}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}} = \frac{x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}}{\eta_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}},$$

$$(1')\qquad x^{l} = \Delta(\mathrm{M}, a^{l}),\qquad h^{l} = \Delta(\mathrm{A}_{l}, a^{l}),\qquad \mathrm{X}^{l} = \frac{x^{l}}{h^{l}},$$

$$(1'')\qquad x_{l} = \Delta(m, \mathrm{A}_{l}),\qquad h_{l} = \Delta(a^{l}, \mathrm{A}_{l}),\qquad \mathrm{X}_{l} = \frac{x_{l}}{h_{l}};$$

dans les dernières formules, on a mis l au lieu de t. Relativement aux coordonnées u, je remarque seulement qu'on a $U^L = \frac{u^L}{\eta_L}$, avec $u^L = (-1)^{pq} x^L$, $\eta_L = (-1)^{pq} \eta^L$; on a en particulier $U^l = \frac{u^l}{h_l}$, avec $u^l = (-1)^{n-1} x^l$, $h_l = (-1)^{n-1} h^l$; ....

L'élément transformé d'un élément M_p^q (18, 58) est désigné par N_q^p, avec des coordonnées y ou v; le comoment de deux éléments M_p^q est défini aux n°s 18 et 59.

2. La fonction ponctuelle σ de p points, la fonction tangentielle Σ de p tropes sont définies au n° 27; pour $p = n$, on a les fonctions s et S (29).

Le moment de deux éléments associables a deux propriétés essentielles : l'une est donnée aux n°s 56 et 37, l'autre aux n°s 51, 35, 30; pour le comoment on a les n°s 59, 36, 31.

Les deux propriétés du moment donnent pour le polytrope de référence (Chap. I) les formules

$$(2) \qquad (-1)^{L,T} \sigma_L \sigma_T \times \eta_T^L = s_0, \qquad (-1)^{T,L} \Sigma_T \Sigma_L \times \eta_T^L = S_0,$$

$$(3) \qquad h^l \dots h^l = \sigma_L \Sigma_L \times \eta_T^L,$$

le déterminant des Δ se réduisant ici à un produit; on a, en particulier,

$$(2') \qquad (-1)^{l,T} s_l \times h^l = s_0, \qquad (-1)^{l,T} S_l \times h_l = S_0,$$

$$(3') \qquad h^1 \dots h^n = s_0 S_0,$$

avec l au lieu de t dans l'avant-dernière formule; l'élimination de η_T^L entre les formules ci-dessus donne les premières formules du n° 6. (Les formules du n° 9 sont employées aux n°s 47, 113, 118, 140.)

Le théorème des déterminants de Δ explique la définition des coordonnées normales x_T^L d'un élément M_p^q au n° 53, l'élément étant défini par p points ou par q tropes, et par suite la définition des coordonnées homogènes au n° 46. Le cas particulier $p = n - 1$ explique la formule du n° 33 (dans laquelle il faut rétablir le signe = qui a été omis), et par suite les résultats du n° 14. Le cas $p = n$ rend compte des deux formules du n° 29 (dans ce numéro, ligne 10, il faut remplacer le mot : *colonnes*, par le mot :

rangées); ce cas peut encore expliquer le facteur normalisant indiqué à la fin du n° 33.

3. La figure de référence auxiliaire (19) a une importance capitale; on peut la comparer au triangle polaire du triangle de référence en Géométrie sphérique, ce triangle polaire étant à la fois $\underline{\mathrm{P}}$ et $\overline{\mathrm{P}}$.

En premier lieu, si, dans la suite considérée au n° 59, les deux éléments intermédiaires appartiennent au polytrope de référence P, on a la suite $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}\,\mathrm{A}_{\mathcal{L}}^{\mathfrak{T}}\,\mathrm{A}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\,\overline{\mathrm{A}}_{\mathfrak{T}}^{\mathcal{L}}$, qui donne

$$(4) \qquad (\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}, \mathrm{A}_{\mathcal{L}}^{\mathfrak{T}}) = ((\mathrm{A}_{\mathcal{L}}^{\mathfrak{T}}, \mathrm{A}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}})) = \gamma_{\mathcal{L}\mathrm{L}}^{\mathfrak{T}\mathrm{T}},$$

la double parenthèse indiquant un comoment, c'est-à-dire que (58) les coordonnées $x_{\mathcal{L}}$ des éléments $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}$ du polytrope $\underline{\mathrm{P}}$ sont les quantités $\gamma_{\mathcal{L}\mathrm{L}}^{\mathfrak{T}\mathrm{T}}$; par exemple, dans le second alinéa du n° 19, en considérant la suite $\underline{a}^{l}\,\mathrm{A}_{\lambda}\,\mathrm{A}_{l}\,\overline{a}^{\lambda}$, on a pour les coordonnées x_{λ} des tropes de $\underline{\mathrm{P}}$,

$$(4') \qquad \Delta(\underline{a}^{l}, \mathrm{A}_{\lambda}) = \gamma(\mathrm{A}_{\lambda}, \mathrm{A}_{l}) = \gamma_{\lambda l};$$

de même, en considérant la suite $\underline{\mathrm{A}}_{l}\,a^{\lambda}\,a^{l}\,\overline{\mathrm{A}}_{\lambda}$, on a pour les coordonnées x^{λ} des tropes de $\underline{\mathrm{P}}$,

$$(4'') \qquad \Delta(\underline{\mathrm{A}}_{l}, a^{\lambda}) = \Gamma(a^{\lambda}, a^{l}) = \Gamma^{\lambda l}.$$

En second lieu, si, dans la suite du n° 59, le second élément intermédiaire appartient seul au polytrope de référence, on a la suite $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}\,\mathrm{M}_{p}^{q}\,\mathrm{A}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{N}_{q}^{p}$, qui donne (58, 64)

$$(\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}, \mathrm{M}_{p}^{q}) = ((\mathrm{M}_{p}^{q}, \mathrm{A}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}) = (\mathrm{A}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}, \mathrm{N}_{q}^{p}),$$

ou bien

$$(5) \qquad \underline{u}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}} = ((\mathrm{M}_{p}^{q}, \mathrm{A}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}})) = v_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}};$$

on peut aussi considérer la suite $\mathrm{L}_{q}^{p}\,\mathrm{A}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}_{p}^{q}\,\overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{L}}$. C'est ainsi que, aux n°s 20 et 26, en considérant la suite $\underline{a}^{l}\,\mathrm{M}\,\mathrm{A}_{l}\,n$, on a

$$(5') \qquad \underline{u}^{l} = \gamma(\mathrm{M}, \mathrm{A}_{l}) = v_{l};$$

on a de même

$$(5'') \qquad \underline{u}_l = \Gamma(m, a^l) = v^l.$$

(A la fin du n° 26, dans les deux formules de droite, il faut remplacer y par v et u par x; dans ce même numéro, on a mis plusieurs fois a_l pour a^l.)

4. Au n° 55 on a le théorème des moments; l'élément M_q^p, affecté du coefficient 1, est le résultant des éléments de même espèce A_T^L affectés de coefficients X_T^L qui sont les coordonnées X relatives aux éléments opposés : en prenant les moments par rapport à M_p^q, on a la formule

$$1 \times (M_p^q, M_q^p) = \sum X_L^T \times (M_p^q, A_L^T) = \sum X_L^T . x_T^L,$$

signalée au n° 10. Le théorème lui-même explique les coefficients X_L^T; car, en désignant par k_L^T les coefficients qui doivent rendre le théorème exact, et en prenant les moments par rapport aux éléments A_L^T, on a

$$1 \times (A_L^T, M_q^p) = k_L^T \times (A_L^T, A_T^L),$$

d'où l'on conclut $k_L^T = X_L^T$. On peut écrire

$$(M_p^q, M_q^p) = \sum \frac{u_L^T . x_T^L}{\gamma_T^L},$$

et cette formule contient des moments d'une seule espèce.

La formule du n° 60 doit être comprise comme il suit : en considérant la suite $\underline{M_q^p M_p^q N_p^q} N_q^p$, on a, d'après la dernière formule ci-dessus,

$$(6) \qquad ((M_p^q, N_p^q)) = (N_p^q, N_q^p) = \sum Y^L . v_L = \sum Y^L . \underline{u}^L;$$

la formule de transformation du n° 54, qui donne $\underline{u}^L$, s'explique ainsi :

$$(7) \qquad \underline{u}^L = (\underline{A}_T^L, M_p^q) = \sum X^{\mathcal{L}} . \gamma_{\mathcal{L}L},$$

les coordonnées $x_{\mathcal{L}}$ de l'élément $\underline{A}_T^L$ étant les quantités $\gamma_{\mathcal{L}L}$,

comme on l'a vu; on arrive à la formule

$$(8) \qquad ((M_p^q, N_p^q)) = \sum\sum X^{\mathcal{L}} . Y^L \times \gamma_{\mathcal{L}L}.$$

5. Au nº 61 on a le théorème des comoments; la formule (6) devient

$$((6)) \qquad 1 \times ((M_p^q, N_p^q)) = \sum Y^L \times ((M_p^q, A_L));$$

le second élément est considéré comme un élément résultant, et l'on prend les comoments par rapport au premier; on a de même

$$1 \times ((M_p^q, N_p^q)) = \sum X^{\mathcal{L}} \times ((A_{\mathcal{L}}, N_p^q)),$$

le premier élément étant considéré comme un élément résultant (au nº 61, on a mis par erreur A_L pour $A_{\mathcal{L}}$). La formule de transformation du nº 59, qui donne $((M_p^q, A_L))$, et qui équivaut à la formule (7), résulte de la dernière formule que l'on vient d'écrire; on a

$$((7)) \qquad ((M_p^q, A_L)) = \sum X^{\mathcal{L}} \times \gamma_{\mathcal{L}L}.$$

On retrouve ainsi la formule

$$((8)) \qquad ((M_p^q, N_p^q)) = \sum\sum X^{\mathcal{L}} . Y^L \times \gamma_{\mathcal{L}L}.$$

6. Si l'on suppose chacun des deux éléments M_p^q, N_p^q défini par p points, la formule (6) donne la première formule du nº 60, la formule (7) donne la formule de transformation du nº 38, et la formule (8) donne une expression du produit $\sigma\sigma'((M_p^q, N_p^q))$ signalée au nº 62. De même, si chacun des deux éléments est défini par q tropes, etc.

7. Si les deux éléments M et N sont identiques, les trois formules du nº 4 de l'Avertissement, ou celles du nº 5 qui leur sont équivalentes, donnent la relation entre les coordonnées d'un élément M_p^q (34); au nº 6 on a les trois premières formules du nº 38 pour le calcul de σ^2, etc.

Au n° 38, la formule

$$\sigma^2 = \begin{vmatrix} \sum \underline{u}_{\prime}^{1}\, X_{\prime}^{1} & \sum \underline{u}_{\prime}^{1}\, X_{\prime\prime}^{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum \underline{u}_{\prime\prime}^{1}\, X_{\prime}^{1} & \sum \underline{u}_{\prime\prime}^{1}\, X_{\prime\prime}^{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

donne, par un développement connu,

$$\sigma^2 = \begin{Vmatrix} \underline{u}_{\prime}^{1} & \underline{u}_{\prime}^{2} & \cdots\cdots\cdots & \underline{u}_{\prime}^{n} \\ \underline{u}_{\prime\prime}^{1} & \underline{u}_{\prime\prime}^{2} & \cdots\cdots\cdots & \underline{u}_{\prime\prime}^{n} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} X_{\prime}^{1} & X_{\prime}^{2} & \cdots\cdots\cdots & X_{\prime}^{n} \\ X_{\prime\prime}^{1} & X_{\prime\prime}^{2} & \cdots\cdots\cdots & X_{\prime\prime}^{n} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot \end{Vmatrix},$$

le second membre étant une somme de produits de déterminants; on a écrit, d'une manière très concise,

$$\sigma^2 = [[\underline{u}_{l}^{l}]].[[X_{l}^{l}]].$$

Une remarque analogue s'applique aux formules de transformation, quand on évalue le déterminant des $\underline{u}$.

4'. Avant de faire $p = 1$ ou $q = 1$ dans ce qui précède, nous signalerons la composition des points ou des tropes, dont la première est analogue à la théorie du barycentre, et la seconde est analogue à la composition des forces dans un plan. La composition des points s'explique de proche en proche en partant du n° 76; on a facilement le premier alinéa du n° 49; si l'on considère un point M, affecté du coefficient 1, comme le point résultant des n points de référence affectés de coefficients convenables, on voit, en partant de la composition de deux points, que ces coefficients sont les coordonnées X du point. De même, etc. On a le théorème des Δ (41). On comprend alors la définition d'un Δ au n° 12

$$\Delta(M, m) = \sum X_l . x^l, \qquad \Delta(m, M) = \sum X^l . x_l;$$

on a encore

$$\Delta(M\, m) = \sum \frac{u_l . x^l}{h^l}.$$

Les formules du n° 21 s'expliquent comme celles du n° 60, et les formules de transformation du n° 19 s'expliquent comme celles du n° 54; on a

(6′) $$\gamma(\mathrm{M},\mathrm{N}) = \Delta(\mathrm{N}, n) = \sum \mathrm{Y}^l . v_l = \sum \mathrm{Y}^l . \underline{u}^l,$$

(7′) $$\underline{u}^l = \Delta(\underline{a}^l, \mathrm{M}) = \sum \mathrm{X}^\lambda . \gamma_{\lambda l},$$

(8′) $$\gamma(\mathrm{M},\mathrm{N}) = \sum\sum \mathrm{X}^\lambda . \mathrm{Y}^l \times \gamma_{\lambda l};$$

on a de même pour deux tropes

(6″) $$\Gamma(m, n) = \Delta(n, \mathrm{N}) = \sum \mathrm{Y}_l . v^l = \sum \mathrm{Y}_l . \underline{u}_l,$$

(7″) $$\underline{u}_l = \Delta(\underline{\mathrm{A}}_l, m) = \sum \mathrm{X}_\lambda . \Gamma^{\lambda l},$$

(8″) $$\Gamma(m, n) = \sum\sum \mathrm{X}_\lambda . \mathrm{Y}_l \times \Gamma^{\lambda l}.$$

5′. On a aussi le théorème des γ (42). On en conclut (26)

((6′)) $$\gamma(\mathrm{M},\mathrm{N}) = \sum \mathrm{Y}^l . \gamma(\mathrm{M}, \mathrm{A}_l),$$

et l'on a également

$$\gamma(\mathrm{M},\mathrm{N}) = \sum \mathrm{X}^\lambda . \gamma(\mathrm{A}_\lambda, \mathrm{N});$$

la formule de transformation du n° 26, qui donne $\gamma(\mathrm{M}, \mathrm{A}_l)$, et qui équivaut à la formule (7′), résulte de la dernière formule que l'on vient d'écrire : on a

((7′)) $$\gamma(\mathrm{M}, \mathrm{A}_l) = \sum \mathrm{X}^\lambda . \gamma_{\lambda l};$$

on arrive ainsi à la formule

((8′)) $$\gamma(\mathrm{M},\mathrm{N}) = \sum\sum \mathrm{X}^\lambda . \mathrm{Y}^l \times \gamma_{\lambda l}.$$

On a de même le théorème des Γ, etc. On en conclut

((6″)) $$\Gamma(m, n) = \sum \mathrm{Y}_l . \Gamma(m, a^l),$$

et l'on a également

$$\Gamma(m, n) = \sum \mathrm{X}_\lambda . \Gamma(a^\lambda, n);$$

la formule de transformation

$$((7''))\qquad \Gamma(m, a^l) = \sum X_\lambda . \Gamma^{\lambda l}$$

donne la formule

$$((8''))\qquad \Gamma(m, n) = \sum\sum X_\lambda . Y_l \times \Gamma^{\lambda l}.$$

[Les formules inverses du n° 19 demandent quelques éclaircissements. D'abord, les deux déterminants inverses du n° 5 sont $\left[\frac{\gamma^{\lambda l}}{h^\lambda}\right]$ et $\left[\frac{\Gamma^{\lambda l}}{h^l}\right]$, ou

$$\begin{vmatrix} \frac{\gamma^{11}}{h^1} & \frac{\gamma^{12}}{h^1} & . & . & . \\ \frac{\gamma^{21}}{h^2} & \frac{\gamma^{22}}{h^2} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{\Gamma^{11}}{h^1} & \frac{\Gamma^{12}}{h^2} & . & . & . \\ \frac{\Gamma^{21}}{h^1} & \frac{\Gamma^{22}}{h^2} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Cela posé, les formules directes étant écrites sous la forme

$$\underline{u}^l = \sum x^\lambda \frac{\gamma^{\lambda l}}{h^\lambda},$$

on a, d'après la fin du n° 1, les formules inverses

$$x^\lambda = \sum \underline{u}^l \frac{\Gamma^{\lambda l}}{h^l} = \sum \frac{\underline{u}^l}{\underline{h}_l} \Gamma^{\lambda l} = \sum \underline{U}^l \Gamma^{\lambda l};$$

on considère les colonnes du premier déterminant et les rangées du second; on tient compte des relations

$$\underline{h}_l = \Delta(\underline{a}^l, \underline{A}_l) = \Delta(A_l, a^l) = h^l.$$

En échangeant λ et l, on a les formules du n° 19.]

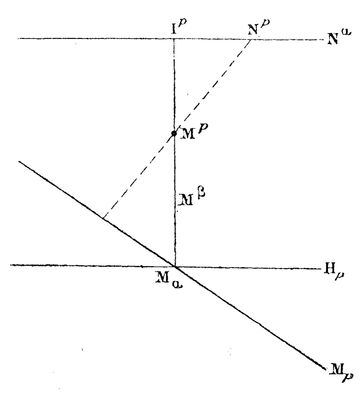
6'. La formule (6''), en supposant chacun des deux tropes m et n défini par $n-1$ points, conduit à la formule qui donne la valeur de l'expression $\sigma\sigma'\Gamma(m, n)$ en fonction des coordonnées $\underline{u}$ des points du premier trope et des coordonnées $\overline{Y}$ des points du second : cette formule est analogue à la première formule du n° 32; la formule (7'') donne les formules de transformation du

n° 32, et la formule (8″) donne la valeur de l'expression ci-dessus avec la seule figure de référence P. De même, etc.

7′. Si les deux tropes m et n sont identiques, les formules (6″), (7″), (8″), ou les formules ((6″)), ((7″)), ((8″)) qui leur sont équivalentes, donnent la relation entre les coordonnées d'un trope (22); au n° 6′, on a le calcul de σ^2 (32, 34). De même, etc.

8. On peut rapprocher des calculs indiqués aux n°s 6, 7, 6′, 7′ de l'avertissement les calculs des n°s 116, 117, 118 de l'Ouvrage.

9. Au Chapitre VII, § IV, on a le théorème des quatre éléments : je prie le lecteur de lire les deux énoncés, en se reportant à la figure ci-dessous.



J'écris ici les formules du n° 131 : tout d'abord, l'élément H_p ayant pour transformé I^p, on a

$$1 = (H_p, I^p) = (H_p, M^\beta) \times (M_\alpha, I^p),$$

et comme les deux éléments H_p, M^β, pleinement conjugués de seconde espèce, ont un moment tangentiel dont le carré est 1, ..., on a simultanément

$$(9) \qquad (H_p, M^\beta) = 1, \qquad (M_\alpha, I^p) = 1;$$

on a alors, par le théorème des quatre éléments,

$$(10) \qquad (H_p, M^p) = (H_p, M^\beta) \times (M_\alpha, M^p) = (M_\alpha, M^p),$$

$$(11) \qquad (M_p, I^p) = (M_p, M^\beta) \times (M_\alpha, I^p) = (M_p, M^\beta),$$

le moment tangentiel, ou le moment ponctuel, étant égal à 1 parce que les deux éléments dont on prend le moment sont pleinement conjugués; on en conclut

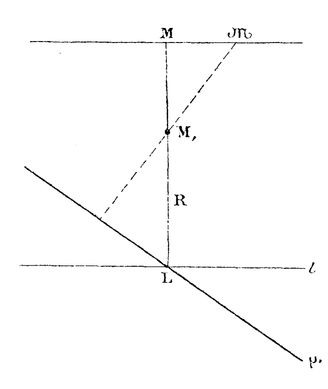
$$(12)\qquad (M_p, M^p) = (M_p, M^\beta) \times (M_\alpha, M^p) = (M_p, I^p) \times (H_p, M^p);$$

on a aussi, en faisant disparaître l'élément H,

$$(13)\qquad (M^p, M_p) = ((M^p, I^p)) \times (I^p, M_p).$$

[Après cette formule on a mis dans le texte : et ainsi de suite, pour : etc.].

On a en particulier, avec la figure suivante



les relations

$$1 = (l, M) = (l, R) \times (L, M),$$

$$(9')\qquad (l, R) = 1, \qquad (L, M) = 1,$$

$$(10')\qquad (l, M_{,}) = (l, R) \times (L, M_{,}) = (L, M_{,}),$$

$$(11')\qquad (\mu, M) = (\mu, R) \times (L, M) = (\mu, R)$$

et la formule (10'), avec l'hypothèse $(L, M) = 1$, est une formule du n° 97; on a encore

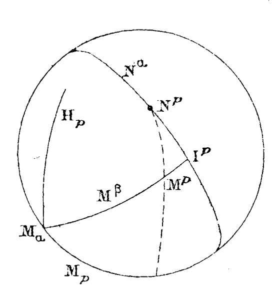
$$(12')\qquad (\mu, M_{,}) = (\mu, R) \times (L, M_{,}) = (\mu, M) \times (l, M_{,}),$$

$$(13')\qquad (M_{,}, \mu) = ((M_{,}, M)) \times (M, \mu)$$

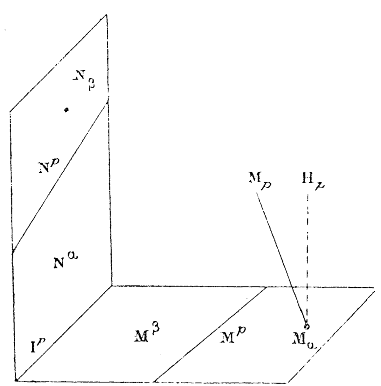
et ces formules ont servi au n° 102.

Je donne encore, pour le théorème des quatre éléments, la

figure schématique



On a ensuite le corollaire du théorème des quatre éléments, avec une application (105) qu'on peut voir dans le texte. On a la figure schématique

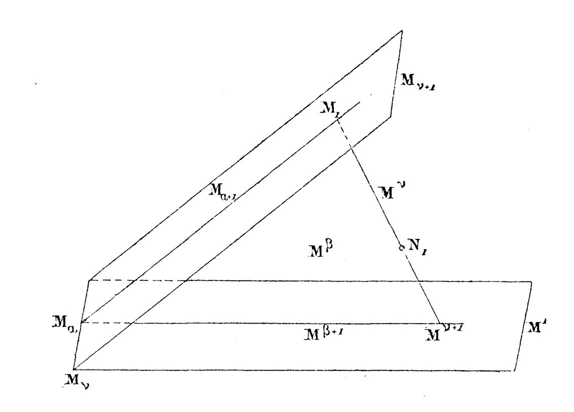


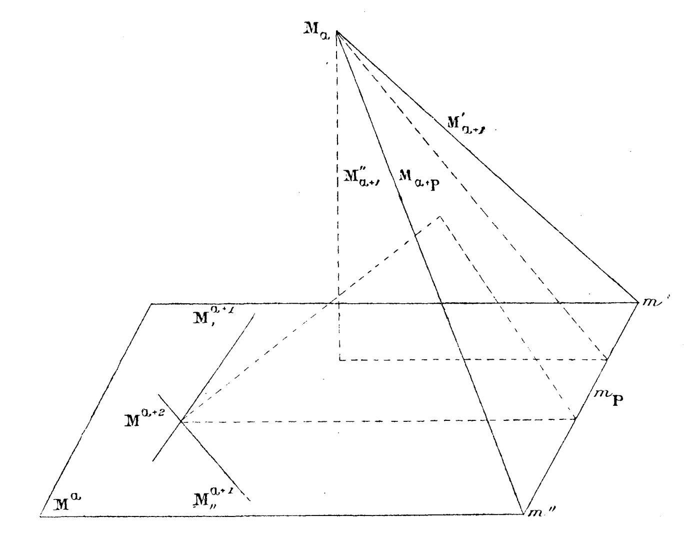
[A la fin du n° 97, on a mis le rayon A pour l'axe A; au n° 99, ligne 11, il faut lire M_2^*. Au n° 103, lignes 23, 25 et 39, il faut mettre $\Delta^2 = 1$; au même numéro, le Δ des deux formules est $\Delta(\mathcal{M}m)$, et il est égal à $(-1)^{n-1}$, et non à 1, quand $\mathcal{M}$ est le transformé de m, attendu qu'on a alors $\Delta(m\mathcal{M}) = 1$: d'ailleurs, la suite $\underline{m\mathcal{M}_1\mathcal{M}}$ donne bien

$$\gamma(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}) = \Delta(m, \mathcal{M}_1) = (-1)^{n-1}\Delta(\mathcal{M}_1, m)].$$

10. Je signale en terminant la Géométrie autour de M_α dans M^β (Chapitre VIII), les moments réduits (9, 118), la fonction ponctuelle de P éléments $M_{\alpha+1}$ ayant un élément M_α inscrit commun (138), et le théorème des déterminants de moments (150). Je

donne ici deux figures schématiques indiquées aux n°s 142 et 151.





11. Dans les figures schématiques, on doit considérer un point comme un élément dirigé : on dirige un point en l'affectant du signe + ou du signe —. La notion de point dirigé ne se présente pas en Géométrie euclidienne, parce que la relation entre les coordonnées tétraédriques d'un point s'écrit

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{h'} + \frac{z}{h''} + \frac{t}{h'''} = 1.$$

Cette relation pourrait être écrite sous la forme

$$\left(\frac{x}{h}+\ldots\right)^2 = 1,$$

le cercle de l'infini (quadrique évanouissante) ayant pour équation ponctuelle

$$\left(\frac{x}{h}+\ldots\right)^2 = 0,$$

quand on part de l'équation tangentielle ; le point serait alors un élément dirigeable.

G. FONTENÉ.

Juin 1892.

L'HYPERESPACE

A

$(n-1)$ DIMENSIONS.

PRÉLIMINAIRES.

J'indiquerai brièvement les deux idées essentielles de ce travail; la première est, je pense, une idée neuve, et je l'exposerai en restant dans l'espace réel.

I.

On a défini depuis longtemps la pseudo-distance de deux points et le pseudo-angle de deux plans par rapport à une quadrique quelconque; cette quadrique est la quadrique double d'une correspondance par polaires réciproques.

Je ne crois pas qu'on ait essayé de remplacer cette correspondance par une *corrélation générale,* la pseudo-distance étant alors définie par rapport à la quadrique des points doubles de la corrélation, le pseudo-angle étant défini par rapport à la quadrique des plans doubles.

En cherchant dans cette voie, j'ai été conduit à la notion du paramètre d'un rayon (droite lieu d'un point) et du paramètre d'un axe (droite enveloppe d'un plan); et c'est cette notion que je crois surtout nouvelle. Étant donné un rayon, tout point M de ce rayon donne lieu à un plan transformé n qui coupe le rayon en un point N; les deux points M et N sont liés homographiquement sur le rayon, et la pseudo-distance MN est constante; c'est cette

constante que j'appelle le *paramètre du rayon*. Dans une correspondance par polaires réciproques, l'homographie des points M et N est une involution, et le paramètre est $\frac{\pi}{2}$ pour tous les rayons; dans une corrélation générale, chaque rayon a un paramètre particulier.

Je définis de même le *paramètre d'un axe*.

J'appelle alors σ de deux points le quotient du sinus de leur pseudo-distance par le sinus du paramètre du rayon qui les contient; je définis de même le Σ de deux plans. (Le rapport anharmonique de quatre points ou de quatre plans conserve, avec des σ ou des Σ, la même expression qu'avec des sinus de pseudo-distances ou de pseudo-angles.) Le γ de deux points M et $\mathfrak{M}$, pris dans cet ordre, est le σ des points $\mathfrak{M}$ et N, N étant le point du rayon qui est dans le plan n transformé de M; les quantités $\gamma(\mathrm{M}, \mathfrak{M})$ et $\gamma(\mathfrak{M}, \mathrm{M})$ sont différentes. On définit de même le Γ de deux plans dont l'ordre est donné. Dans le cas d'une correspondance par polaires réciproques, les σ et les Σ sont des sinus, les γ et les Γ sont des cosinus.

Les propriétés métriques du tétraèdre dans une corrélation générale sont les mêmes que dans une correspondance par polaires réciproques, avec des σ et des Σ au lieu de sinus. Par exemple, la proportionnalité entre les aires des faces et les sinus des trièdres supplémentaires de ceux du tétraèdre se conserve avec les changements convenables.

Je suis arrivé à la notion du paramètre, ou du moins à la notion analogue pour la Géométrie conique, en considérant le déterminant d'un trièdre et en cherchant à le remplacer par un déterminant non symétrique; j'ai à peu près deviné la forme (n° 89)

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c - \gamma \sin c & . \\ \cos c + \gamma \sin c & 1 & . \\ . & . & . \end{vmatrix},$$

dérivée d'un déterminant symétrique et d'un déterminant gauche, et j'ai alors été conduit à prendre $\gamma = \cot\theta$ afin d'avoir

$$\frac{\sin(\theta - a)}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(\theta + a)}{\sin\theta};$$

cela me donnait les premières formules du n° 82, qui définissent $\gamma(\mathrm{M}, \mathfrak{M})$ et $\gamma(\mathfrak{M}, \mathrm{M})$ (1).

II.

Dans l'hyperespace M_n un point dépend de $n-1$ paramètres. Les éléments analogues au point, à la droite, et au plan dans l'espace réel M_4, sont en nombre $n-1$; nous appellerons *trope* (τρέπω, je tourne) l'élément qui remplace le plan; l'élément qui suit le point et celui qui précède le trope seront le rayon et l'axe; les éléments seront désignés comme il suit, avec $p+q=n$:

$$\mathrm{M}_1^{n-1},\quad \mathrm{M}_2^{n-2},\quad \ldots,\quad \mathrm{M}_p^q,\quad \ldots,\quad \mathrm{M}_q^p,\quad \ldots,\quad \mathrm{M}_{n-2}^2,\quad \mathrm{M}_{n-1}^1;$$

tous ces éléments seront dirigés (*voir* n° 79 pour un rayon dirigé).

Nos calculs forment une étude des propriétés *métriques* de la *corrélation générale* dans l'hyperespace, en prenant comme point de départ (coordonnées d'un point ou d'un trope) le Δ d'un point et d'un trope; on verra (n° 97) que cette quantité est le σ de deux points ou le Σ de deux tropes, et il est essentiel de remarquer que c'est une quantité relative à la corrélation que l'on étudie (n° 80) (*voir* le n° 171).

Pour deux éléments associables $\mathrm{M}_p^q, \mathrm{M}_q^p$ on aura à considérer une quantité appelée *moment* et qui est un produit de Δ (n° 107); le moment d'un point et d'un trope est leur Δ; nous désignerons un moment par la notation $(\mathrm{M}_p^q, \mathrm{M}_q^p)$, un Δ sera (M, m). Quand on change l'ordre des deux éléments, le moment est multiplié par $(-1)^{pq}$; on a en particulier $(m, \mathrm{M}) = (-1)^{n-1}(\mathrm{M}, m)$.

Je me suis attaché à considérer toutes les quantités avec des signes. Il y a là une question délicate, et des erreurs ont pu se glisser dans ce travail, d'autant plus que j'ai dû modifier mes premières idées à ce sujet. L'accord des formules entre elles me fait cependant croire qu'il n'y a aucune erreur grave à ce sujet.

---

(1) *Voir* au n° 90 une idée que j'ai eue trop tard pour en tirer tout le parti possible.



CHAPITRE I.

POLYTROPE DE RÉFÉRENCE.

Nous considérerons des indices en nombre n, qui ne seront pas nécessairement $1, 2, \ldots, n$; nous les supposerons seulement rangés dans l'ordre naturel. Nous désignerons par L une suite de p indices l pris parmi les indices ci-dessus; les q indices complémentaires t seront désignés par T. Quand on écrira $(-1)^{L,T}$, la notation L, T indiquera le nombre des dérangements entre des indices l et des indices t dans la suite LT; on a $L, T + T, L = pq$. Les lettres $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$ se liront : grand λ, grand τ.

1. Déterminants inverses. — Soit un déterminant d, d'ordre n, différent de 0, dont l'élément général est $c_{l\lambda}$, et que nous représenterons par $[c]$. Le produit de deux mineurs complémentaires, d'indices $L\mathfrak{L}$ et $T\mathfrak{T}$, entre dans la valeur de d avec le signe de combinaison $(-1)^{L,T+\mathfrak{L},\mathfrak{T}}$ ou $(-1)^{T,L+\mathfrak{T},\mathfrak{L}}$.

Le déterminant inverse de d sera un déterminant Δ ayant pour éléments $\Gamma^{l\lambda}$ les premiers mineurs de d, affectés du signe de combinaison et *divisés par* d; on a $d\Delta = 1$, et les deux déterminants sont réciproques; un mineur d'ordre quelconque de Δ est le quotient par d du mineur complémentaire dans d affecté du signe de combinaison, et inversement.

Si l'on multiplie par k les éléments d'une ligne de d, les éléments de la ligne correspondante de Δ sont divisés par k.

On a simultanement les relations

$$X_l = \sum c_{l\lambda} x^\lambda, \qquad x^\lambda = \sum \Gamma^{l\lambda} X_l,$$

les rangées des Γ étant les colonnes de Δ.

2. Polytrope de référence. — Soient n lettres A_l représentant les points ou sommets de référence, et n lettres a^l représentant les

tropes ou faces de référence. Le trope a^l passe par les points de référence autres que A_l, en sorte que le point A_l est dans les tropes autres que a^l; chaque point est opposé à un trope.

La notation A_{12} représente le rayon A_1A_2, et le nombre des rayons est $\frac{n(n-1)}{2}$; a^{12} représente l'axe a^1a^2; chaque rayon est opposé à un axe. La notation A_L ou a^T ou A_L^T représente un élément A_p^q, enveloppe des tropes passant par les p points L, lieu des points communs aux q tropes T; les indices sont rangés dans l'ordre naturel. L'élément A_q^p opposé est A_T^L. Ces éléments forment le polytrope de référence P.

Dans ce qui va suivre, on se donnera arbitrairement les signes des quantités σ; les signes des Σ seront alors déterminés. Un σ ou un Σ à un seul indice sera l'unité positive.

3. **Premiers éléments métriques.** — Soient $n(n-1)$ quantités arbitraires $\gamma_{12}, \ldots$, qui seront $\gamma(A_1, A_2), \ldots$; γ_{12} et γ_{21} sont différents; on a $\gamma_{11} = 1, \ldots$. La *fonction ponctuelle* du système des n points de référence est une quantité $\sigma_{1\ldots n}$ ou s_0, dont le carré est le déterminant des γ, supposé différent de 0, et dont le signe est arbitraire. Le signe de $s_{1\ldots n}$ change quand on échange deux indices; une convention analogue s'applique aux σ et aux Σ que l'on rencontrera. La fonction ponctuelle des $n-1$ points $A_2\ldots A_n$ est une quantité $\sigma_{2\ldots n}$ ou s_1, dont le carré est le déterminant des γ de ces points pris deux à deux, et dont le signe est arbitraire; on aura des quantités analogues $\sigma_{13\ldots}$ ou s_2, les indices étant dans l'ordre naturel.

Si l'on considère les $n-1$ points A du trope a^1 et les $n-1$ points A du trope a^2, nous définirons le Γ de ces tropes pris dans cet ordre, en disant que le déterminant des γ fournis par la combinaison des premiers points avec les seconds a pour valeur $s_1 s_2 \Gamma^{12}$; on a $\Gamma^{11} = 1$. Le signe du Γ est indépendant de l'ordre des indices, pourvu que l'ordre des indices dans le déterminant soit le même que dans les σ.

4. Les γ et les Γ sont réciproques. La *fonction tangentielle* du système des n tropes de référence est une quantité $\Sigma_{1\ldots n}$ ou S_0 dont le carré est le déterminant des Γ, et dont le signe sera fixé.

On définit de même S_1, ... En considérant les deux déterminants inverses, dont l'un est le déterminant des γ, et l'autre a pour éléments $(-1)^{l,T+\lambda,\mathfrak{T}} \frac{s_l s_\lambda}{s_0^2} \Gamma^{l\lambda}$, on a

$$\frac{s_1}{S_1} = \frac{s_2}{S_2} = \ldots = (-1)^{n-1} \frac{s_0}{S_0},$$

en disposant des signes relatifs des S. On a alors deux déterminants inverses dont l'un est le déterminant des Γ, et on en conclut une formule corrélative de celle qui définit les Γ.

5. Nous définissons ici les quantités

$$h^l = \Delta(A_l, a^l) \qquad \text{et} \qquad h_l = \Delta(a^l, A_l),$$

l'indice de h étant emprunté au second élément (n° 10), par les formules équivalentes

$$(-1)^{l,T} s_l h^l = s_0, \qquad (-1)^{l,T} S_l h_l = S_0.$$

Nous avons alors deux déterminants inverses : l'un est le déterminant des γ dont les colonnes sont divisées par les h^l, l'autre est le déterminant des Γ dont les rangées sont divisées par les h^l; ou inversement. Leur produit étant 1, on a

$$h^1 \ldots h^n = s_0 S_0,$$

en disposant du signe de S_0; on peut prendre les h avec des indices inférieurs.

6. **Nouveaux éléments métriques.** — La fonction ponctuelle de p points A est une quantité σ_L dont le carré est le déterminant des γ de ces points pris deux à deux, et dont le signe est arbitraire. La fonction tangentielle de q tropes a est une quantité Σ_T définie d'une manière analogue et dont le signe sera fixé.

Si nous reprenons les deux déterminants inverses du n° 5, en considérant deux mineurs principaux complémentaires, et disposant des signes des Σ, nous aurons

$$\frac{(-1)^{T,L} \Sigma_T}{\sigma_L [h^t]} = \frac{1}{s_0}, \qquad \frac{(-1)^{L,T} \sigma_L}{\Sigma_T [h_l]} = \frac{1}{S_0};$$

le crochet indique ici un produit. Si l'on considère deux mineurs

quelconques complémentaires, on a une formule qui conduit à définir le *comoment* de deux éléments A_p^q de référence, A_L^T et $A_{\mathfrak{L}}^{\mathfrak{T}}$, dont l'ordre est donné; ce comoment $\gamma_{L\mathfrak{L}}$ ou $\gamma^{T\mathfrak{T}}$ ou $\gamma_{L\mathfrak{L}}^{T\mathfrak{T}}$ est défini par les relations

$$\sigma_L \sigma_{\mathfrak{L}} \gamma_{L\mathfrak{L}} = [\gamma_{l\lambda}] \qquad \text{et} \qquad \Sigma_T \Sigma_{\mathfrak{T}} \Gamma^{T\mathfrak{T}} = [\Gamma^{t\tau}],$$

les crochets indiquant des déterminants. Le comoment d'un élément A avec lui-même est 1. Le comoment de deux tropes est leur Γ, etc. Le signe du comoment est indépendant de l'ordre des indices, comme au n° 3.

7. On a la relation

$$(-1)^{pq} \frac{\Sigma_L \Sigma_T}{\sigma_L \sigma_T} = \frac{S_0}{s_0}.$$

Le *moment* des deux éléments de référence opposés A_L^T et A_T^L, pris dans cet ordre, sera la quantité η_T^L (les indices sont empruntés au second élément), définie par les relations équivalentes

$$(-1)^{L,T} \sigma_L \sigma_T \eta_T^L = s_0, \qquad (-1)^{T,L} \Sigma_T \Sigma_L \eta_T^L = S_0;$$

l'ordre des σ ou des Σ est celui des deux éléments, et l'exposant de (-1) est lié à cet ordre.

Si l'ordre des deux éléments est changé, le moment est multiplié par $(-1)^{pq}$. Pour un point et un trope, on remplace η par h.

8. On a facilement

$$[h^l] = \sigma_L \Sigma_L \eta_T^L,$$

le moment du second membre étant celui de l'élément A_L^T défini par les points et de l'élément A_T^L défini par les tropes, parce qu'on prend $\Delta(A_l, a^l)$; on aurait une formule semblable avec h_l et η_L.

Cette formule donne une propriété du moment de deux éléments de référence dont l'un est défini par des points et l'autre par des tropes; les deux formules du n° 7 sont relatives à deux éléments définis tous deux par des points ou tous deux par des tropes. L'élimination de η_T^L ferait retrouver les premières formules du n° 6.

9. Derniers éléments métriques. — Dans un tétraèdre, on peut étudier ce qui se passe autour d'un sommet ou d'une arête, dans une face ou sur une arête, autour d'un sommet dans une face. Dans un polytrope, on peut étudier ce qui a lieu autour d'un élément A_α qui sera A_F, dans un élément A^β qui sera A^H, les deux suites F et H n'ayant pas d'indice commun. On posera

$$N + \alpha + \beta = n.$$

Un élément $A_{\alpha+P}^{\beta+Q}$ passant par A_α et situé dans A^β sera A_{FI}^{HJ}, et on aura $P + Q = N$; les I et les J variant, on a un système comparable à un polytrope.

Le *moment réduit* des deux éléments A_{FI}^{HJ}, A_{FJ}^{HI} qui ont A_F inscrit commun, A^H circonscrit commun, sera la quantité $\eta_{FI,FJ}^{HJ,HI}$ définie par les relations équivalentes (nº 6)

$$(-1)^{I,J} \sigma_{FI} \sigma_{FJ} \eta_{FI,FJ} = \sigma_F \sigma_{FIJ}, \qquad (-1)^{J,I} \Sigma_{HJ} \Sigma_{HI} \eta^{HJ,HI} = \Sigma_H \Sigma_{HJI},$$

tous les indices étant dans l'ordre naturel. On peut placer d'abord les F ou les H. Quand on change l'ordre des deux éléments, le moment réduit est multiplié par $(-1)^{PQ}$. Pour un seul indice f, on a $\sigma_f = 1$ et la formule de gauche se simplifie; de même, etc.

On remarquera les deux cas suivants :

1° S'il n'y a pas d'indice f, c'est-à-dire si les deux éléments n'ont pas d'élément inscrit commun et sont seulement dans un élément circonscrit commun, on a un moment non réduit, défini par la relation

$$(-1)^{I,J} \sigma_I \sigma_J \eta_{I,J} = \sigma_{IJ},$$

qui est entièrement comparable à une relation du nº 7; l'autre relation donnée plus haut avec des Σ reste la même : on l'obtient par les premières formules du nº 6.

2° S'il n'y a pas d'indice h, c'est-à-dire si les deux éléments n'ont pas d'élément circonscrit commun et sont seulement autour d'un élément inscrit commun, on a

$$(-1)^{J,I} \Sigma_J \Sigma_I \eta^{J,I} = \Sigma_{JI},$$

que l'on transformerait par les premières formules du nº 6.

Si l'on échange I et J dans la dernière formule et si l'on suppose

dans les deux formules un seul indice i, on a

$$(-1)^{i, L-i}\, \sigma_{L-i}\, \eta_{i, L-i} = \sigma_L,$$
$$(-1)^{i, L-i}\, \Sigma_{L-i}\, \eta^{i, L-i} = \Sigma_L,$$

la notation $L - i$ indiquant les indices L autres que i. Pour deux indices L, on a sur un rayon ou autour d'un axe

$$\eta_{i,j} = (-1)^{i,j}\, \sigma_{ij},$$
$$\eta^{i,j} = (-1)^{i,j}\, \Sigma_{ij},$$

en sorte que le moment de deux points ou de deux tropes de référence est leur σ ou leur Σ dans lequel on met les indices dans l'ordre où l'on prend les deux points, tandis qu'ils sont supposés ici dans l'ordre naturel.

S'il n'y a ni indice f, ni indice h, on a $\eta_{L,T}^{T,L} = \eta_T^L$ et l'on met seulement les indices du second élément.

On doit remarquer que les moments sont des moments d'éléments dirigés, autour d'éléments dirigés A_F, dans des éléments dirigés A^H.

On a supposé les indices des σ toujours rangés dans l'ordre naturel; on aurait $\sigma_I \sigma_J \eta_{I,J} = \sigma_{IJ}$, si l'on mettait dans le dernier σ, d'abord les indices I puis les indices J dans le même ordre que dans les deux premiers (nº 108); on l'a dit plus haut dans le cas d'un seul indice i et d'un seul indice j.

On pourrait démontrer ici le théorème des quatre éléments (nº 128).

Nous observons ici qu'on peut considérer :

1º La Géométrie générale, donnant lieu à des moments d'éléments associables; il n'y a alors ni F ni H. Le polytrope a des points et des tropes.

2º La Géométrie autour d'un élément A_F, ou dans un élément A^H, donnant lieu à des moments non réduits. Le polytrope a des tropes ou des points.

3º La Géométrie autour d'un élément A_F, dans un élément A^H, donnant lieu à des moments réduits.



CHAPITRE II.

LE Δ D'UN POINT ET D'UN TROPE, ETC. LES γ DE DEUX POINTS; LES Γ DE DEUX TROPES.

§ I.

10. **Coordonnées normales.** — Au point de vue de la notation, nous dirons d'abord ceci : Les coordonnées x_T^L d'un élément M_p^q seront les moments de cet élément et des éléments de référence A_T^L; on considérera $\frac{x_T^L}{\gamma_T^L} = X_T^L$. Les coordonnées u_T^L de l'élément seront les moments des éléments de référence et de l'élément; elles sont égales aux coordonnées x multipliées par $(-1)^{pq}$; on considérera $\frac{u_T^L}{\gamma_L^T} = U_T^L$ qui est égal à X_T^L. On aura des formules de la forme

$$(M_p^q M_q^p) = \sum X_L^T x_T^L, \qquad (M_q^p M_p^q) = \sum X_T^L x_L^T,$$

l'ordre des coordonnées étant inverse de celui des éléments.

Cela posé, considérons n variables x^l liées par la relation suivante, dans laquelle on pose $\frac{x^l}{h^l} = X^l$,

$$\sum X^\lambda X^l \gamma_{\lambda l} = 1, \qquad \text{ou} \qquad \varphi(X, X) = 1, \qquad \text{ou} \qquad \sum X^l \varphi_l = 1,$$

en posant

$$\varphi_l = \sum X^\lambda \gamma_{\lambda l};$$

nous dirons qu'un système de valeurs de ces quantités forme les coordonnées normales x^l d'un point M, et nous aurons $x = \Delta(M, a)$; un point dépend de $n - 1$ paramètres.

Soient n autres variables x_l, avec un indice inférieur, liées par

la relation suivante, dans laquelle on pose $\frac{x_l}{h_l} = X_l$,

$$\sum X_\lambda X_l \Gamma^{\lambda l} = 1, \quad \text{ou} \quad \Phi(X, X) = 1, \quad \text{ou} \quad \sum X_l \Phi^l = 1,$$

en posant

$$\Phi^l = \sum X_\lambda \Gamma^{\lambda l};$$

un système de valeurs de ces quantités formera les coordonnées normales x_l d'un trope m, et l'on aura $x = \Delta(m, A)$; un trope dépend de $n - 1$ paramètres.

Un point et un trope sont dirigés; on change le sens en changeant les signes des coordonnées.

11. Coordonnées homogènes. — Les coordonnées homogènes sont des quantités proportionnelles aux coordonnées normales; on obtient celles-ci en divisant les premières par le facteur normalisant $\pm\sqrt{\varphi}$ ou $\pm\sqrt{\Phi}$.

12. Le Δ d'un point et d'un trope, etc. — Un point M avec le coefficient 1 est (nº 49) le point résultant des points de référence A_l affectés des coefficients X^l; un trope m, etc.; en prévision du théorème des Δ (nº 41), nous écrirons avec des coordonnées normales

$$\Delta(M, m) = \sum X_l x^l, \qquad \Delta(m, M) = \sum X^l x_l;$$

le second élément, affecté du coefficient 1, est le résultant des éléments de référence affectés de coefficients qui sont les coordonnées X de cet élément, et on prend les Δ du premier élément et des éléments qu'on vient de dire.

On peut écrire $\Delta(M, m) = \sum \frac{u_l x^l}{h^l}$; cette relation, qui renferme seulement des Δ où le point est avant le trope, peut s'écrire sous la forme d'un déterminant d'ordre $n + 1$ égal à 0, et elle rentre alors dans l'identité des Δ pour $n + 1$ points et $n + 1$ tropes (nº 65).

13. Association d'un point et d'un trope. — Un point et un trope sont associés lorsque leur Δ est nul. Les équations normales d'un



trope et d'un point sont respectivement

$$\sum X_l x^l = 0, \qquad \sum X^l x_l = 0;$$

la première est une équation ponctuelle, dont le premier membre donne $\Delta(\mathfrak{M}, m)$ quand on y remplace les coordonnées x par les coordonnées ξ d'un point $\mathfrak{M}$; la seconde est une équation tangentielle dont le premier membre donne $\Delta(\mu, M)$. Si les coefficients sont en coordonnées homogènes, on a des facteurs normalisants.

14. **Détermination d'un trope par des points, etc.** — Un trope est déterminé par $n-1$ points $M_{,}M_{,,}\ldots$; les coordonnées homogènes x du trope sont les quotients par S_1, S_2, ... des déterminants d'ordre $n-1$ de la matrice des coordonnées x, les colonnes étant prises dans l'ordre naturel; l'un au moins de ces déterminants est supposé différent de 0. L'équation du trope s'écrit sous la forme d'un déterminant égal à 0; nous reviendrons sur le facteur normalisant (n° 33). On a encore la condition pour que n points soient dans un même trope. De même, etc.

15. **Polytrope.** — Un polytrope est la figure formée par n tropes non concourants; cette figure a n sommets. Elle dépend de $n(n-1)$ paramètres. Le déterminant des coordonnées homogènes x des sommets, et celui des quantités X pour les faces, sont inverses à un facteur constant près.

16. **Polytrope de référence.** — Considérons les n tropes dont les coordonnées normales x sont respectivement

$$\begin{matrix} h_1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & h_2, & 0, & \ldots, & 0, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{matrix}$$

(ces coordonnées vérifient bien la relation $\Phi = 1$); ces n tropes forment le polytrope de référence, et les sommets de ce polytrope ont pour coordonnées normales x les termes d'un tableau analogue au précédent, avec un indice supérieur; on a $\Delta(A_1, a^1) = h^1$, $\Delta(a^1, A_1) = h_1$. Les équations normales des tropes de référence sont $x^l = 0$, et les coordonnées normales d'un point sont les Δ de ce point et des tropes de référence. De même, etc.



Un point dont les coordonnées homogènes sont données est défini par $n - 1$ tropes passant par les axes de référence d'une face; de même, etc.

17. Rapport anharmonique (MNmn). — Étant donnés deux points MN et deux tropes mn, le rapport anharmonique du système MNmn est la valeur de l'expression $\frac{(\mathrm{M}m)}{(\mathrm{M}n)} : \frac{(\mathrm{N}m)}{(\mathrm{N}n)}$; avec des coordonnées homogènes ce rapport s'évalue sans facteur normalisant.

§ II.

18. Corrélation initiale. — Les faits suivants, dont on trouvera plus loin le développement et la démonstration, forment la base de la corrélation initiale; on distinguera avec soin les figures *primitives* et les figures *transformées*.

1° A un point primitif M, dirigé, répond un trope transformé n, également dirigé;

2° A un trope primitif m, dirigé, répond un point transformé N, également dirigé;

3° Le Δ d'un point M et d'un trope m est égal au Δ des éléments transformés n et N, en sorte qu'on a $\Delta(\mathrm{M}, m) = \Delta(n, \mathrm{N})$. En particulier, si un point M et un trope m sont associés, les éléments transformés le sont aussi; quand un point décrit un trope, le trope transformé du point mobile passe par le point transformé du trope fixe; si l'on considère un point M et le trope transformé n, tout point N de ce trope est transformé d'un trope m passant par le point M. Étant donnés $n - 1$ points et les tropes transformés, le trope des points a pour transformé le point des tropes. Le polytrope transformé d'un polytrope a ses éléments transformés de ceux du primitif.

Tout point M peut être considéré comme point primitif ou comme point transformé : il a un trope transformé n, un trope primitif l, d'où la suite lMn; on a de même la suite LmN. On désigne toujours l'élément transformé par la lettre consécutive à celle du primitif; les coordonnées de N, de n, seront y ou v.

Soient deux points M et N; formons la suite $\underline{m\mathrm{MN}n}$, les traits allant de gauche à droite d'un élément au transformé; nous définirons $\gamma(\mathrm{MN})$ par les relations

$$\Delta(m\mathrm{M}) = \gamma(\mathrm{MN}) = \Delta(\mathrm{N}n);$$

les deux quantités $\gamma(\mathrm{MN})$ et $\gamma(\mathrm{NM})$ sont différentes. Pour deux tropes m et n, on aura la suite $\underline{\mathrm{M}mn\mathrm{N}}$, et on posera

$$\Delta(\mathrm{M}m) = \Gamma(mn) = \Delta(n\mathrm{N}).$$

On emploiera de préférence les formules

$$\gamma(\mathrm{MN}) = \Delta(\mathrm{N}n), \qquad \Gamma(mn) = \Delta(n\mathrm{N}),$$

qui contiennent l'élément transformé du premier élément.

On a $\gamma(\mathrm{LM}) = (-1)^{n-1}\gamma(\mathrm{MN})$, les points L et N étant le primitif et le transformé d'un même trope m; etc.

Le γ de deux points est égal au Γ des tropes transformés.

19. Figure de référence auxiliaire. — Au point de vue de la notation, nous dirons d'abord ceci : On peut considérer trois polytropes de référence $\underline{\mathrm{P}}\mathrm{P}\overline{\mathrm{P}}$ dont chacun est le transformé du précédent. Les comoments d'un élément M_p^q et des éléments A_p^q de référence sont les coordonnées u de l'élément N_q^p transformé du premier, ou les coordonnées $\underline{u}$ de l'élément donné; les comoments des éléments de référence et de l'élément M_p^q sont les coordonnées x de l'élément L_q^p primitif du premier, ou les coordonnées $\overline{x}$ de l'élément donné; nous emploierons de préférence les premiers comoments avec des u et des $\underline{u}$.

Dans le polytrope $\underline{\mathrm{P}}$ (nº 18), les tropes ont pour coordonnées normales x les éléments γ des colonnes du déterminant s_0^2, les sommets ont pour coordonnées normales x les éléments Γ des colonnes du déterminant S_0^2. Les coordonnées auxiliaires $\underline{u}$ d'un point ou d'un trope seront données par les formules

$$\underline{u}^l = \sum \mathrm{X}^\lambda \gamma_{\lambda l} = \varphi_l, \qquad \underline{u}_l = \sum \mathrm{X}_\lambda \Gamma^{\lambda l} = \Phi^l,$$

et l'on a les formules inverses

$$x^l = \sum \underline{U}^\lambda \Gamma^{l\lambda}, \qquad x_l = \sum \underline{U}_\lambda \gamma_{l\lambda},$$

en posant $\underline{U}^\lambda = \dfrac{u^\lambda}{\underline{h}_\lambda}$.

Dans les formules inverses, on a remplacé h^λ par $\underline{h}_\lambda$, qui lui est égal (n°s 18, 20) ; on le vérifie aisément par les formules de droite, à l'aide des identités obtenues en multipliant dans les deux déterminants inverses du n° 5 les éléments de deux rangées ou colonnes correspondantes et ajoutant; cette vérification n'est d'ailleurs pas nécessaire, si on suppose qu'on laisse h^λ jusqu'au n° 21. Les γ et les Γ de $\underline{P}$ sont les Γ et les γ de P (n°s 18, 21); de là cette remarque : Le polytrope $\overline{P}$ donnerait des formules analogues aux précédentes, avec des $\overline{x}$ et des $\overline{h}$, et les formules directes de ce cas expliqueraient les formules inverses obtenues plus haut.

On a

$$\Delta(\mathrm{M}m) = \sum \mathrm{X}_l x^l = \sum\sum \mathrm{X}_l \Gamma^{l\lambda} \underline{U}^\lambda = \sum \underline{U}^\lambda \underline{u}_\lambda$$

d'où, comme avec P,

$$\Delta(m\mathrm{M}) = \sum \underline{X}^\lambda \underline{x}_\lambda.$$

20. **Trope transformé d'un point, etc.** — Un trope n est transformé d'un point M lorsque les coordonnées normales y ou v du trope sont égales aux coordonnées normales $\underline{x}$ ou $\underline{u}$ du point : $\Delta(\mathrm{A}n) = \Delta(\underline{a}\mathrm{M})$; et les deux relations $\varphi = 1$, $\Phi = 1$ rendent cela possible, comme on verra. Un point N est transformé d'un trope m, etc. On a

$$v_l = \underline{u}^l = \varphi_l(\mathrm{X}), \qquad v^l = \underline{u}_l = \Phi^l(\mathrm{U}).$$

La dernière formule du n° 19 donne la relation essentielle

$$\Delta(m\mathrm{M}) = \Delta(\mathrm{N}n).$$

21. **Fonctions γ et Γ.** — On a (n° 18)

$$\gamma(\mathrm{MN}) = \sum \mathrm{Y}^l \underline{u}^l = \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \qquad \Gamma(mn) = \sum \mathrm{Y}_l \underline{u}_l = \Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}):$$

on peut écrire ces formules par des déterminants égaux à o. On vérifie $\gamma(A_1, A_2) = \gamma_{12}, \ldots$.

22. **Relations $\varphi = 1$, $\Phi = 1$.** — Le Δ d'un point et du trope transformé, le Δ d'un trope et du point transformé, doivent être égaux à 1; on a $\gamma(\mathrm{MM}) = 1$, $\Gamma(mm) = 1$, ou

$$\sum X^1 \underline{u}^1 = 1, \qquad \sum X_1 \underline{u}_1 = 1.$$

On retrouve $\varphi = 1$, $\Phi = 1$, et l'on peut écrire ces relations par des déterminants égaux à o (*voir* aussi n° 77).

23. **Points conjugués, etc.** — Formons la suite $\underline{\underline{m\mathrm{MN}n}}$: les points M et N sont conjugués, ou plutôt le second est conjugué du premier, si le trope transformé du premier est associé au second, etc.; leur γ est nul. Deux tropes sont conjugués, etc. La condition $\gamma = 0$ peut recevoir différentes formes ; le lieu des points conjugués d'un point est un trope, etc. L'expression *éléments conjugués* n'entraîne pas l'idée d'un rapport anharmonique égal à -1.

24. **Équationnelles doubles.** — Une équationnelle sera le lieu d'un point mobile, l'enveloppe d'un trope mobile ; sans insister sur le trope tangent en un point, sur le point de contact d'un trope, nous dirons qu'une équationnelle a une équation ponctuelle et une équation tangentielle. Le lieu des points conjugués d'eux-mêmes est l'équationnelle double S représentée par $\varphi = 0$; l'enveloppe des tropes conjugués d'eux-mêmes est l'équationnelle double $\Phi = 0$.

25. Le Δ d'un point et d'un trope étant donné en coordonnées homogènes par la formule

$$\Delta = \frac{\sum \frac{u_l x^l}{h^l}}{\sqrt{\varphi}\sqrt{\Phi}},$$

on a les trois cas particuliers suivants :

1° Le point et le trope étant associés, on a généralement $\Delta = 0$ par définition.

2° Un point de l'équationnelle double S a ses coordonnées nor-

males infinies à cause du système de coordonnées employé; il est défini par ses coordonnées homogènes avec un facteur normalisant égal à o; le Δ d'un tel point et d'un plan quelconque est généralement infini. De même, etc.

3° Le Δ d'un point et d'un trope associés, lorsque le point est sur S, ou lorsque le trope est tangent à s, est indéterminé. En particulier, le Δ d'un point et d'un trope dont l'un est transformé de l'autre (lequel est généralement égal à 1) est indéterminé lorsque le point est sur S, auquel cas le trope est tangent à s.

Pour le γ de deux points, on a les faits suivants :

1° Le γ de deux points est généralement nul lorsque le second est conjugué du premier.

2° Le γ de deux points dont l'un est sur l'équationnelle double S est généralement infini.

3° Le γ de deux points conjugués dont l'un est sur S est indéterminé. En particulier, le γ de deux points confondus (lequel est généralement égal à 1) est indéterminé lorsque les deux points sont confondus en un point de S.

On aurait des résultats analogues pour deux tropes.

26. Coordonnées auxiliaires γ et Γ. — Avec une seule figure de référence, les coordonnées auxiliaires $\underline{u}$ d'un point ou d'un trope sont les quantités $\gamma(\mathrm{MA})$ et $\Gamma(ma)$; les coordonnées $\overline{x}$ seraient les quantités $\gamma(\mathrm{AM})$ et $\Gamma(am)$. On a (n° 42) les formules mnémoniques

$$\gamma(\mathrm{MA}_l) = \sum \mathrm{X}^\lambda \gamma(\mathrm{A}_\lambda \mathrm{A}_l) = \varphi_l, \qquad \Gamma(ma_l) = \sum \mathrm{X}_\lambda \Gamma(a_\lambda a_l) = \Phi^l,$$

en considérant l'élément donné comme le résultant des éléments de référence, et des formules analogues pour $\gamma(\mathrm{AM})$ et $\Gamma(am)$. On a encore

$$\gamma(\mathrm{MN}) = \sum \mathrm{Y}^l \gamma(\mathrm{MA}_l) = \ldots, \qquad \Gamma(mn) = \sum \mathrm{Y}_l \Gamma(ma_l) = \ldots,$$

en considérant le second élément comme le résultant des éléments de référence. On retrouverait $\varphi = 1$, $\Phi = 1$.

Pour un point M primitif et le trope transformé n, pour un trope m primitif et le point transformé N, on a

$$(n) \qquad v_l = \gamma(\mathrm{MA}_l), \qquad\qquad (\mathrm{N}) \qquad y^l = \Gamma(ma^l),$$
$$(\mathrm{M}) \qquad x^l = \Gamma(a^l n), \qquad\qquad (m) \qquad u_l = \gamma(\mathrm{A}_l \mathrm{N}).$$

CHAPITRE III.

FONCTIONS PONCTUELLES ET TANGENTIELLES.

Bien que ce Chapitre précède toute étude des éléments M_p^q, on devra concevoir ici qu'une figure composée de p points est dans un élément M_p^q, et qu'une figure composée de p tropes est formée autour d'un élément M_q^p.

27. Fonctions ponctuelles et tangentielles. — La fonction ponctuelle d'un système de points $M_{,}M_{,,}\ldots$, dont le nombre ne surpasse pas n, est une quantité σ dont le carré est le déterminant des γ de ces points considérés deux à deux. Pour p points dirigés, dans un élément M_p^q dirigé, l'ordre des points étant donné, la fonction ponctuelle a un signe relatif au théorème des déterminants de Δ (n° 51) et que nous définirons; inversement, on peut déterminer un élément M_p^q dirigé en donnant p points dirigés, avec le signe de la fonction ponctuelle des points pris dans un ordre déterminé; si l'on change le sens de l'élément, on change le signe de la fonction ponctuelle.

La fonction tangentielle d'un système de tropes $m'm''\ldots$, dont le nombre ne surpasse pas n, est de même une quantité Σ dont le carré est le déterminant des Γ de ces tropes considérés deux à deux.

La fonction ponctuelle de p points est nulle lorsqu'ils appartiennent à un même élément M_{p-1}; la fonction tangentielle de p tropes est nulle lorsqu'ils passent par un même élément M^{p-1}. Plus généralement, la fonction ponctuelle de p points est nulle lorsque l'élément M_p^q qu'ils déterminent fait partie du complexe des éléments M_p^q conjugués d'eux-mêmes; par exemple, la fonction ponctuelle de $n-1$ points est nulle, lorsque le trope qu'ils déterminent appartient à l'équationnelle double s. Ces faits seront démontrés.

28. Si l'on considère un système de points dans un élément dirigé, et le système des tropes transformés autour de l'élément

dirigé qui est le transformé du premier, ou inversement, la fonction ponctuelle du système de points est égale à la fonction tangentielle du système de tropes; le signe sera vérifié. On a, par exemple, pour le polytrope $\underline{P}$, $\underline{\Sigma}_L = \sigma_L$; et comme on a

$$\underline{\eta}^{L}_{T} = (-1)^{pq}\eta^{L}_{T} = \eta^{T}_{L},$$

on a pour le polytrope $\underline{P}$ les mêmes formules que pour P.

(A). 29. **Les deux fonctions d'un polytrope.** — Nous appellerons fonction ponctuelle s d'un polytrope la fonction ponctuelle des n sommets; la fonction tangentielle S du polytrope sera la fonction tangentielle des n faces. On a

$$s^2 = [\underline{u}'_{\prime}][X'_{\prime}],$$

et comme le premier déterminant est le produit du second par le déterminant s_0^2, on a facilement la formule

$$s S_0 = [x'_{\prime}],$$

qui définit le signe de s quand l'ordre des points est donné (celui des colonnes du déterminant); la fonction ponctuelle de n points est nulle quand les points sont dans un même trope. On a de même pour n tropes

$$s_0 S = [x'_{l}],$$

qui définit le signe de S; S est nulle quand les n tropes passent par un même point. On vérifie $\underline{s_0} = S_0$, etc.; on obtient la règle du n° 28 pour le signe.

30. **Théorème des déterminants de Δ pour n points et n tropes, etc.** — Étant donnés deux polytropes quelconques, si l'on considère les points du premier $M_{\prime}\ldots$ et les tropes du second $m'\ldots$, en multipliant membre à membre les formules qui donnent s et S, on a la formule

$$s S = [\Delta'_{\prime}],$$

en prenant indifféremment $\Delta(Mm)$ ou $\Delta(mM)$; le déterminant des Δ est nul lorsque les n points sont dans un même trope, et aussi lorsque les n tropes passent par un même point. Si les deux polytropes sont confondus, on a l'extension à un polytrope quelconque de la dernière formule du n° 5.

31. Étant donnés deux polytropes P et P' dont les points sont désignés par M et N, les tropes par m et n, on a

$$ss' = [\gamma(M_, N_,)], \qquad SS' = [\Gamma(m'n')].$$

(B). 32. **Fonction ponctuelle pour** $n - 1$ **points, etc.** — Le carré de la fonction ponctuelle d'un système de $n - 1$ points est

$$\sigma^2 = [[\underline{u}'_,]].[[X'_,]],$$

le crochet double indiquant une matrice à n colonnes; lorsque les $n - 1$ points sont dans un même axe, tous les déterminants de ces deux matrices sont nuls (nº 47) et la fonction ponctuelle est nulle; elle est encore nulle lorsque le trope des $n - 1$ points appartient à l'équationnelle s (nº 34).

Pour avoir σ^2 en fonction des seules coordonnées x, on évalue les déterminants de la première matrice en fonction de ceux de la seconde; on a, par exemple,

$$[\underline{u}^2_,] = [[X^1_,]].[[\gamma_{12}]];$$

nous reviendrons, dans un instant, sur ce calcul.

Nous donnerons enfin la formule

$$S_0^2\,\sigma^2 = (-1)^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & x'_, \\ x^\lambda_, & \Gamma'^\lambda \end{bmatrix},$$

dont le second membre est un déterminant d'ordre $2n - 1$; on arrive à cette formule en mettant la première sous une forme analogue et multipliant par S_0^2 mis sous la forme d'un déterminant d'ordre $2n - 1$.

On aurait des formules analogues pour le Σ de $n - 1$ tropes; cette fonction est nulle quand les tropes ont un rayon commun, etc.

33. **Trope déterminé par des points, etc.** — Les coordonnées du trope de $n - 1$ points sont données par les formules

$$\frac{X_1}{[x^2_, x^3_{,,} \ldots]} = \frac{X_2}{-[x^1_, x^3_{,,} \ldots]} = \ldots = \frac{1}{\lambda S_0};$$

on en tire

$$\frac{\underline{U}_1}{[\underline{u}^2_, \underline{u}^3_{,,} \ldots]} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda s_0};$$

et comme on a $\sum X_1 \underline{u}_1 = 1$, on a $\lambda^2 = \sigma^2$. Dès lors, en prenant $\lambda = \sigma$, les coordonnées normales du trope dirigé défini par $n-1$ points et par le signe de leur σ (l'ordre des points étant connu) sont données par les formules

$$x_1 \frac{[x_{,}^2 x_{,,}^3 \ldots]}{\sigma S_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La fonction ponctuelle de $n-1$ points dans un trope dirigé a un signe lorsqu'on fixe l'ordre des points ; on vérifierait $\underline{s}_1 = S_1, \ldots$, et on aurait la règle du n° 28 pour le signe. On a des résultats analogues pour le point de $n-1$ tropes.

Le facteur normalisant du n° 14 pour l'équation du trope de $n-1$ points est σS_0 ; il est nul quand le trope appartient à l'équationnelle s. Le facteur normalisant pour l'équation du point de $n-1$ tropes est Σs_0.

34. Les formules précédentes éclairent les calculs du n° 32 relatifs à σ^2 : la première formule équivaut à la relation entre les coordonnées d'un trope, écrite avec $\underline{u}$ et u ; les formules de transformation équivalent aux formules qui donnent les coordonnées $\underline{u}$ d'un trope en fonction des coordonnées u ; la formule qui donnerait σ^2 en fonction des seules coordonnées x peut s'obtenir en remplaçant dans $\Phi = 1$ les coordonnées u par leurs valeurs ci-dessus, et si l'on écrit cette relation par un déterminant égal à 0, on obtient σ^2 par un déterminant égal à 0. On peut écrire

$$S_0^2 \sigma^2 = \Phi[(x_{,}^2 x_{,,}^3 \ldots), -(x_{,}^1 x_{,,}^3 \ldots), \ldots];$$

σ est nul quand le trope des points appartient à l'équationnelle s. De même, etc.

On pourrait considérer deux systèmes de $(n-1)$ points, et obtenir des formules donnant la valeur de l'expression

$$\sigma\sigma' \Gamma(m, n).$$

35. **Théorème des déterminants de Δ pour $n-1$ points et $n-1$ tropes, etc.** — Étant donnés $n-1$ points qui déterminent un trope m, et $n-1$ tropes qui déterminent un point M, on a

$$[\Delta_{,}'] = \sigma \Sigma \Delta(m, M),$$

tous les éléments étant dirigés. Ce déterminant est nul dans trois cas : lorsque les points sont à un même axe, lorsque les tropes passent par un même rayon, enfin lorsque le trope des points et le point des tropes sont associés.

Lorsque le trope des points est conjugué de lui-même, le déterminant n'est généralement pas nul, bien qu'on ait $\sigma = 0$, parce que le Δ du second membre est alors infini ; si le point des tropes est en outre associé au trope des points, le déterminant est nul, le Δ est indéterminé. De même, etc.

36. Si l'on considère maintenant $n - 1$ points M qui déterminent un trope m, et $n - 1$ autres points N qui déterminent un trope n, on a

$$[\gamma(\mathrm{M}_,\mathrm{N}_,)] = \sigma\sigma'\Gamma(mn);$$

le déterminant est nul dans trois cas et on a une remarque comme ci-dessus. En supposant les deux systèmes de points identiques, on retrouve des faits connus. On développerait le premier membre de cette formule comme le premier membre de celle qui donne σ^2 ; la dernière formule du n° 32 serait remplacée par une autre dont le premier membre serait $\mathrm{S}_0^2\,\sigma\sigma'\,\Gamma(mn)$. De même, etc.

37. **Extension des formules $s_0 = s_1 h^1$, $\mathrm{S}_0 = \mathrm{S}_1 h_1$.** — Si l'on considère un point M et le trope de $n - 1$ points, l'équation normale du trope donne $s = \sigma\,\Delta(\mathrm{M}m)$, σ étant la fonction ponctuelle des $n - 1$ derniers points. De même, etc. On peut encore partir de la formule (n° 29) qui donne $s\mathrm{S}_0$.

(C). 38. **Fonction ponctuelle de p points, etc.** — Le carré de la fonction ponctuelle de p points a pour expression

$$\sigma^2 = [[\underline{u'_,}]]\cdot[[\mathrm{X}'_,]];$$

cette quantité est nulle lorsque les p points sont dans un même élément M_{p-1} (n° 47) et, plus généralement, lorsque l'élément déterminé par les p points est conjugué de lui-même (n°s 54, 63). Pour avoir σ^2 en fonction des seules coordonnées x, on a les formules de transformation

$$\frac{1}{\sigma_{\mathrm{L}}}[\underline{u'_,}] = \sum \frac{1}{\Sigma_{\mathcal{L}}}[x^{\lambda}_,]\frac{\gamma_{\mathcal{L}\mathrm{L}}}{\gamma_{,\mathcal{L}}};$$



on a alors

$$\sigma^2 = \sum\sum \frac{[x_{,}^{l}]}{\Sigma_{\mathrm{L}}\, \eta_{,}^{\mathrm{L}}} \frac{[x_{,}^{\lambda}]}{\Sigma_{\mathcal{L}}\, \eta_{,}^{\mathcal{L}}} \gamma_{\mathcal{L}\mathrm{L}};$$

dans l'étude d'un élément M_p^q, nous reviendrons sur ces calculs qui se rattachent à la relation entre les coordonnées normales d'un élément M_p^q. Je donnerai encore pour σ^2 la formule suivante analogue à la dernière formule du n° 32, et dont le second membre est un déterminant d'ordre $n+p$:

$$\mathrm{S}_0^2\, \sigma^2 = (-1)^p \begin{bmatrix} 0 & x_{,}^{l} \\ x_{,}^{\lambda} & \Gamma^{l\lambda} \end{bmatrix};$$

pour $p=1$, on a la relation entre les coordonnées d'un point. De même, etc.

39. On peut écrire

$$\sigma^2 = [\varphi_{,}(\mathrm{X}', \mathrm{X}')], \qquad \sigma^2 = (-1)^p \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{X}_{,}^{1} \\ \underline{u_{,}^{1}} & 1 \end{bmatrix},$$

le déterminant indiqué par 1 étant un déterminant d'ordre n où les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, les autres éléments étant nuls ; il est facile de s'assurer que les seconds membres de ces deux formules sont nuls quand l'élément M_p^q des p points est conjugué de lui-même.

CHAPITRE IV.

ÉLÉMENTS M_p^q. MOMENTS ET COMOMENTS.

§ I.

40. **Composition des points, des tropes.** — Soient des points en nombre quelconque $M_{,}M_{,,}, \ldots$, affectés de coefficients $k_{,}k_{,,}, \ldots$; le point résultant M et son coefficient k sont déterminés par les relations

$$kx^l = k_{,}x_{,}^l + \ldots;$$

le coefficient k est déterminé par la condition que les coordonnées x du point M soient des coordonnées normales. La composition des tropes est analogue. Les équations normales des points composants étant $M_{,} = 0, \ldots$, celle de M est $\frac{k_{,}M_{,} + \ldots}{k} = 0$.

41. **Théorème des Δ.** — Pour la composition des points, on a, par rapport à un trope quelconque ω, la formule

$$k\Delta = k_{,}\Delta_{,} + \ldots;$$

si ω passe en M, le second membre est nul. Une formule analogue a lieu par rapport à un point O pour la composition des tropes.

42. **Théorème des γ et des Γ.** — Pour des points, on a par rapport à un point O

$$k\gamma(\mathrm{OM}) = k_{,}\gamma(\mathrm{OM}_{,}) + \ldots,$$
$$k\gamma(\mathrm{MO}) = k_{,}\gamma(\mathrm{M}_{,}\mathrm{O}) + \ldots;$$

si M est conjugué de O, le second membre de la première formule est nul; si O est conjugué de M, le second membre de la dernière formule est nul.

43. **Coefficient résultant.** — En appliquant la première formule des γ au point résultant, et la seconde aux points composants,

on a

$$k^2 = k_{,}^2 + \ldots + k_{,}k_{,,}[\gamma(M_{,}M_{,,}) + \gamma(M_{,,}M_{,})] + \ldots;$$

le signe que l'on donne à k fixe le sens de M (*voir* aussi n° 77). La même marche a donné $\gamma(MN)$ au n° 26, et on a eu, en particulier, la relation $\varphi = 1$. Si les points composants se confondent, on a $k = k_{,} + \ldots$. De même, etc.

44. Les points $M_{,}M_{,,}\ldots$, affectés des coefficients $k_{,}k_{,,}\ldots$, sont dits en équilibre lorsque le point $M_{,}$ affecté du coefficient $-k_{,}$ est le point résultant des autres points affectés de leurs coefficients : le point résultant est indéterminé avec un coefficient nul; on a pour ω quelconque $k_{,}\Delta_{,} + \ldots = 0$, et pour O quelconque, etc.

Lorsque l'on a seulement $k = 0$, le point résultant est sur l'équationnelle double S; le Δ de ce point et d'un trope ω est infini.

De même, etc.

§ II.

45. **Éléments dérivés.** — Nous allons définir les éléments $M_p^q (p + q = n)$. Soient q tropes $m'm'' \ldots$, et supposons qu'il n'existe pas une même relation linéaire et homogène entre les coordonnées $u'_l u''_l, \ldots$ quel que soit l, l'un au moins des déterminants d'ordre q de la matrice des u étant différent de o. Les points M communs à ces tropes vérifient q conditions distinctes et dépendent de $p - 1$ paramètres; prenons parmi eux p points $M'M'' \ldots$, tels etc. : les coordonnées du point courant M sont données par les formules

$$kx^l = k_{,}x_{,}^l + \ldots,$$

les k étant variables. En outre, tous les points M sont dans tous les tropes m dont les coordonnées sont données par les formules

$$kx_l = k'x'_l + \ldots;$$

ces tropes dépendent de $q - 1$ paramètres, et vérifient p conditions qui sont de passer par p points M. On aurait pu prendre p points, etc.

Nous appellerons élément M_p^q l'ensemble de tous ces points par lesquels passent tous ces tropes; c'est à la fois :

1° Un élément-lieu M_p, lieu de points dépendant de $p-1$ paramètres et vérifiant q conditions;

2° Un élément-enveloppe M^q, enveloppe de tropes dépendant de $q-1$ paramètres et vérifiant p conditions.

Un élément M_p^q dépend de pq paramètres.

Un point courant de l'élément a pour équation $\frac{k_i M_i + \ldots}{k} = 0$; de même, etc.

Deux éléments tels que M_p^q et M_q^p sont dits *associables*.

L'élément M_2 est le *rayon :* il est déterminé par deux points, et ses points dépendent d'un paramètre; l'élément M^2 est l'*axe :* il est déterminé par deux tropes, et ses tropes dépendent d'un paramètre. L'élément M_{n-1}^1 est le trope qui peut être défini par $n-1$ points : les points d'un trope dépendent de $n-2$ paramètres, d'après les formules ci-dessus; de même, etc.

Pour $p=n$ on a tous les points de l'hyperespace M_n^0; pour $q=n$ on a tous les tropes, que l'on peut considérer comme situés autour d'un élément fictif M_0^n.

Un polytrope donne des éléments M_p^q; à chaque M_p^q est opposé un M_q^p.

46. **Coordonnées homogènes d'un** M_p^q. — Étant donné un élément M_p^q :

1° Si l'on considère p points de cet élément, les déterminants d'ordre p fournis par la matrice des coordonnées x^t, et dont un au moins est supposé différent de 0, ont des valeurs dont les rapports sont indépendants des p points qu'on a choisis parmi les points de l'élément pour le définir;

2° Si l'on considère q tropes de ce même élément, les déterminants d'ordre q fournis par la matrice des coordonnées X_t ont des valeurs proportionnelles indépendantes des q tropes qu'on a choisis parmi les tropes de l'élément.

En outre, les déterminants de la seconde matrice sont proportionnels aux déterminants d'indices complémentaires de la première, affectés du signe $(-1)^{L,T}$; pour le démontrer, on écrit que le point M_i est dans les q tropes et on élimine $q-1$ coordonnées x, ce qui en laisse $p+1$; on fait de même pour chaque point, et



des p relations obtenues on tire les rapports des coefficients.

Alors, en tenant compte des formules du n° 6, on voit que les quantités des deux systèmes $\frac{[x_{,}^{l}]}{\Sigma_{L}}$ et $\frac{[x'_{t}]}{\sigma_{T}}$ sont proportionnelles : ce seront les coordonnées homogènes x_{T}^{L} de l'élément M_{p}^{q}. Ces coordonnées sont surabondantes. Ajoutons que, si la coordonnée x_{T}^{L} est nulle, l'élément M_{p}^{q} et l'élément A_{q}^{p} de référence qui est A_{T}^{L} sont associés, c'est-à-dire que ces deux éléments ont un point commun et un trope commun (n° 53).

47. **Équations d'un élément** M_{p}^{q}. — Les déterminants d'ordre $p+1$ de la matrice formée avec les coordonnées d'un point courant M de l'élément et des p points qui le déterminent sont tous nuls; chacune de ces relations représente un trope remarquable, passant par l'élément et par $q-1$ sommets de référence. Si l'on considère $p+1$ tropes de référence comme formant un système comparable à un polytrope, on a les dernières formules du n° 9 et l'équation du trope remarquable prend la forme

$$\sum \frac{x^{L-i}}{\eta^{i, L-i}} x^{i} = 0.$$

Les équations obtenues sont d'ailleurs surabondantes; on a un système suffisant en maintenant fixes p des indices l, ce qui laisse q valeurs possibles pour le $(p+1)^{\text{ième}}$.

Un élément M_{p}^{q} a aussi des équations tangentielles.

48. Les premières relations du n° 47 expriment que $p+1$ points sont à un M_{p}^{q}; elles démontrent que la fonction ponctuelle de $p+1$ points est nulle lorsqu'ils sont à un M_{p}^{q}. De même, la fonction tangentielle de $q+1$ tropes est nulle lorsqu'ils sont à un M_{p}^{q}.

§ III.

49. **Interprétation des coefficients** k. — On peut interpréter les coefficients k, dans le cas du n° 45, c'est-à-dire lorsque le nombre des éléments composants est au plus égal à n. Reprenons les $p+1$ relations qui ont servi à calculer le coefficient résultant (n° 43); si l'on calcule $\frac{k_{,}}{k}$ en laissant de côté d'abord la première relation,

puis la seconde, et si l'on multiplie les deux relations ainsi obtenues, on voit que, en prenant pour k^2 le carré de la fonction ponctuelle des p points composants, $k_{,}^2$ sera le carré de la fonction ponctuelle des p points $MM_{,,}M_{,,,}\ldots$; si l'on prend pour k la fonction ponctuelle des p points composants $M_{,}M_{,,}\ldots$ avec un signe arbitraire, $k_{,}$ sera la fonction ponctuelle des p points $MM_{,,}M_{,,,}\ldots$, le signe de cette fonction ponctuelle étant ainsi déterminé; $k_{,,}$ sera la fonction ponctuelle des p points $M_{,}MM_{,,,}\ldots$, la lettre M remplaçant $M_{,,}$ dans la suite naturelle $M_{,}M_{,,}M_{,,,}\ldots$ (cette règle se comprend bien en supposant $k_{,}=0$, $k_{,,,}=0$, $\ldots$, d'où résulte $k=k_{,,}$). On aurait des résultats analogues pour la composition des tropes.

Dans le cas $p=n-1$, si l'on prend $n-1$ des formules du n° 45, et qu'on en tire les rapports $k_{,}:k$, $\ldots$, en tenant compte des formules du n° 33, on a une vérification. Le cas $p=n$ en fournit une semblable. Une vérification générale peut être faite avec les formules du n° 53.

Lorsque le nombre des points composants est n, on peut donner une autre démonstration que nous exposerons en supposant que les points composants sont les sommets de référence; un point quelconque M de coordonnées x, affecté du coefficient 1, est le point résultant des sommets de référence affectés des coefficients X^1, X^2, $\ldots$, comme on le voit en prenant les Δ par rapport aux tropes de référence; or on peut remplacer ces coefficients par $\frac{s_1 x^1}{s_0}$, $\frac{-s_2 x^2}{s_0}$, $\ldots$, en sorte que, si l'on affecte le point M du coefficient s_0, il sera le point résultant des sommets de référence affectés de coefficients qui représentent en grandeur et en signe les fonctions ponctuelles des polytropes $MA_2A_3\ldots A_n$, $A_1MA_2\ldots A_n$, $\ldots$. De même, etc.

50. **Transformation du théorème des Δ, etc.** — Soient p points $M_{,}M_{,,}\ldots$ et un $(p+1)^{\text{ième}}$ point M situé dans l'élément M_p^q que définissent les p premiers points; désignons par σ la fonction ponctuelle des p premiers points, et par $\sigma_{,}\sigma_{,,}\ldots$ les fonctions ponctuelles des systèmes de points $MM_{,,}M_{,,,}\ldots$, $M_{,}MM_{,,,}\ldots$, $\ldots$, avec les signes définis précédemment : nous pourrons considérer le point M affecté du coefficient σ comme le point résultant des points $M_{,}M_{,,}\ldots$, affectés des coefficients $\sigma_{,}\sigma_{,,}\ldots$. Le théorème des Δ donne alors.

pour un trope ω quelconque

$$\sigma\Delta = \sigma_{,}\Delta_{,} + \ldots,$$

et le théorème des γ donne pour un point O quelconque

$$\sigma\gamma(\mathrm{OM}) = \sigma_{,}\gamma(\mathrm{OM}_{,}) + \ldots,$$
$$\sigma\gamma(\mathrm{MO}) = \sigma_{,}\gamma(\mathrm{M}_{,}\mathrm{O}) + \ldots.$$

On a

$$\sigma^2 = \sigma_{,}^2 + \ldots + \sigma_{,}\sigma_{,,}[\gamma(\mathrm{M}_{,}\mathrm{M}_{,,}) + \gamma(\mathrm{M}_{,,}\mathrm{M}_{,})] + \ldots$$

(*voir* aussi n° 77). On remarquera que ces formules concernent $p+1$ points dans un M_p^q; par exemple, dans l'espace réel, elles peuvent concerner quatre points dans un plan.

Si l'on suppose $p = n+1$, et si les n points $\mathrm{M}_{,}\mathrm{M}_{,,}\ldots$ sont les sommets de référence, la formule

$$\sigma\,\Delta = \sigma_{,}\Delta_{,} + \sigma_{,,}\Delta_{,,} + \ldots$$

est identique à la formule

$$\Delta(m\mathrm{M}) = \mathrm{X}^1 x_1 + \mathrm{X}^2 x_2 + \ldots;$$

la formule qui donne la valeur de σ^2 est identique à la relation entre les coordonnées d'un point, et l'on pourrait l'écrire avec un déterminant. On aurait pu d'ailleurs, dans le cas de n points composants, écrire la valeur du coefficient résultant à l'aide d'un déterminant.

De même, etc.

§ IV.

51. Moments. Théorème des déterminants de Δ. — Soient deux éléments associables. L'élément M_p^q étant défini avec son sens par p points dirigés $\mathrm{M}_{,}\ldots$ et par le signe de leur fonction ponctuelle σ, et l'élément M_q^p étant défini avec son sens par p tropes dirigés $m'\ldots$ et par le signe de leur fonction tangentielle Σ, nous définirons ici le *moment* des deux éléments par la relation

$$\sigma\,\Sigma.(\mathrm{M}_p^q\mathrm{M}_q^p) = [\Delta'_{,}],$$

ces Δ étant des $\Delta(\mathrm{M}m)$ parce que l'élément défini par des points est placé le premier; si l'on met M_q^p le premier, les Δ sont des $\Delta(m\mathrm{M})$, le moment des deux éléments étant multiplié par $(-1)^{pq}$

quand on change l'ordre. Il est facile de montrer que le moment est indépendant des points pris dans le premier élément, etc. Il faut encore prouver que le moment reste le même quel que soit celui des deux éléments que l'on définit par des points, l'autre étant défini par des tropes; ce fait sera démontré directement (n° 54) pour les moments qui seront les coordonnées d'un élément M_p^q, et le fait général résultera alors de la formule (n° 55) qui donne le moment de deux éléments en fonction de leurs coordonnées. Lorsque le moment aura reçu sa définition véritable (n° 107), la relation qui le définit ici constituera le théorème des déterminants de Δ (n° 110). Pour $p = n - 1$, le théorème a été démontré (n° 35), le moment d'un trope et d'un point étant leur Δ.

On aurait en particulier la formule du n° 8 pour un polytrope quelconque.

On trouvera plus loin (n° 56) une autre propriété du moment de deux éléments associables, relative au cas où ces éléments sont définis tous deux par des points, ou tous deux par des tropes, ce qui donne un système de n points ou un système de n tropes; cette propriété est celle du n° 7 étendue à un polytrope quelconque.

52. Les τ_i des n°s 7 et 8 sont des moments dans le polytrope de référence.

53. **Coordonnées normales d'un** M_p^q. — Les coordonnées normales x d'un M_p^q dirigé seront les moments de cet élément et des éléments de référence A_q^p; les coordonnées u seront les moments des éléments de référence et de l'élément. Si l'élément dirigé est défini par p points dirigés $M_l \ldots$ avec le signe de leur σ, on aura

$$x^{\mathrm{L}} = \frac{[x'_l]}{\sigma\,\Sigma_{\mathrm{L}}}, \qquad u^{\mathrm{L}} = \frac{[u'_l]}{\sigma\,\Sigma_{\mathrm{L}}}.$$

Si l'élément est défini par q tropes dirigés $m' \ldots$ avec le signe de leur Σ, on aura

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{[x'_t]}{\Sigma\,\sigma_{\mathrm{T}}}, \qquad u_{\mathrm{T}} = \frac{[u'_t]}{\Sigma\,\sigma_{\mathrm{T}}};$$

et l'on va voir que ces dernières quantités sont égales aux premières en disposant du signe de Σ.



54. Relation entre les coordonnées normales. — Les coordonnées x d'un élément $\underline{A_p^q}$ du polytrope $\underline{P}$ sont les quantités $\Gamma^{L\mathcal{L}}$. Si l'on rapporte un élément M_p^q à $\underline{P}$, on a

$$\underline{u}^L = \frac{[\underline{u}_l^l]}{\sigma\,\sigma_L};$$

en tenant compte de la valeur de σ^2 au n° 38 et en posant $X^L = \frac{x^L}{\eta^L}$, on a la relation entre les coordonnées normales

$$\sum X^L \underline{u}^L = 1;$$

or des formules du n° 38 donnent les formules de transformation

$$\underline{u}^L = \sum X^{\mathcal{L}} \gamma_{\mathcal{L}L},$$

et la relation devient

$$\sum\sum X^{\mathcal{L}} X^L \gamma_{\mathcal{L}L} = 1.$$

Si l'élément est défini par des tropes, on aura avec des coordonnées x_T la même relation; comme l'on sait déjà que les coordonnées x^L et les coordonnées x_T sont proportionnelles, cela prouve que les dernières sont égales aux premières en disposant du signe de Σ. On a ainsi les coordonnées x_T^L; les coordonnées u_T^L sont égales aux premières multipliées par $(-1)^{pq}$.

La relation entre les coordonnées normales d'un M_p^q sera désignée par

$$\psi(X^L X^L) = 1, \qquad \text{ou} \qquad \sum X^L \psi_L = 1,$$

en posant

$$\psi_L = \sum X^{\mathcal{L}} \gamma_{\mathcal{L}L};$$

on peut écrire

$$\underline{u}^L = \psi_L.$$

La relation entre les coordonnées d'un élément M_q^p sera $\Psi(X_L X_L) = 1$, ψ et Ψ ne différant que par le changement de $\gamma_{\mathcal{L}L}$ en $\gamma^{\mathcal{L}L}$.

Comme la relation entre les coordonnées normales a pour premier membre une fonction homogène du second degré, on peut

changer les signes de toutes les coordonnées : changer ces signes, c'est changer le sens positif de l'élément; ce sens étant choisi, c'est-à-dire l'élément étant dirigé, les formules du n° 53 donnent des signes à σ et à Σ pour p points dirigés de cet élément ou q tropes dirigés passant par cet élément.

Signalons le facteur normalisant des coordonnées homogènes.

On peut écrire pour p points

$$\sigma^2 S_0^2 = \psi \{ (-1)^{L,T} [x_l^l] \Sigma_T, \ldots \};$$

cette fonction est nulle lorsque l'élément M_p^q des p points est conjugué de lui-même (n° 63).

55. **Expression du moment. Théorème des moments.** — La formule qui définit le moment devient d'abord

$$\sigma \Sigma (M_p^q M_q^p) = [[x_l^l]].[[X_l^l]].$$

et ensuite

$$(M_p^q M_q^p) = \sum X_L x^L.$$

On peut considérer M_q^p affecté du coefficient 1 comme le résultant des A_q^p de référence affectés des coefficients X_L relatifs aux éléments opposés, et regarder la formule comme la traduction d'un théorème des moments.

56. **Autre propriété du moment.** — La fonction ponctuelle s des n sommets d'un polytrope est donnée par la formule $s S_0 = [x_l^l]$; on en tire facilement

$$s = (-1)^{L,T} \sigma\sigma' (M_p^q M_q^p),$$

σ étant la fonction ponctuelle des points d'indices L, etc., M_p^q et M_q^p étant les deux éléments déterminés par les deux systèmes de points. On a de même pour n tropes

$$S = (-1)^{L,T} \Sigma\Sigma' (M_q^p M_p^q).$$

57. **Association de deux éléments.** — Les éléments M_p^q et M_q^p sont associés lorsqu'ils ont un point commun et, par suite, un trope commun. Le premier étant défini par p points, le second par p tropes, la condition d'association est $[\Delta_l^l] = 0$: le moment

est nul; on peut écrire

$$\sum X_L x^L = 0.$$

Si les deux éléments sont définis par des points, on a

$$[x_{,}^{l}] = 0;$$

etc.

En supposant les X_L fixes et les x^L variables, la relation ci-dessus est l'équation normale de l'élément M_q^p en éléments M_p^q associés; les coefficients ne sont pas quelconques.

§ V.

58. Élément N_q^p transformé d'un élément M_p^q. — Considérons p points $M_{,} M_{,,} \ldots$ et leurs tropes transformés $n' n'' \ldots$; les p points définissent un élément M_p^q, les p tropes définissent un élément N_q^p, et tout point du premier élément a pour transformé un trope passant par le second; tout trope du premier élément a, d'ailleurs, pour transformé un point du second; le second élément sera le transformé du premier, qui sera son primitif. Un point quelconque du premier élément et un point quelconque du second sont conjugués; on peut définir le second élément par q points dont chacun sera conjugué des p points qui définissent le premier; le second élément est le lieu des points qui sont conjugués de tous les points du premier; on aurait des remarques analogues en considérant les tropes des deux éléments. Les coordonnées ν_L du second élément sont données par les formules

$$\nu_L = \underline{u}^L = \sum X^{\mathfrak{L}} \gamma_{\mathfrak{L} L} = \psi_L.$$

Les coordonnées des éléments $\underline{A}_T^L$ du polytrope $\underline{P}$ sont les quantités $\gamma_{\mathfrak{L} L}^{\mathfrak{T} T}$, ce qui définit le sens de ces éléments; on en conclut $\underline{\sigma}_T = \Sigma_T, \ldots$ et l'on a la règle du n° 28 au point de vue du signe.

59. Comoments; théorème des déterminants de γ ou de Γ. — Le moment de deux éléments associables est égal à celui de leurs transformés : cela résulte du théorème des déterminants de Δ; si

l'on considère alors deux éléments de même espèce M_p^q, N_p^q, et si l'on forme la suite $\underline{\mathrm{M}_q^p\,\mathrm{M}_p^q\,\mathrm{N}_p^q}\,\mathrm{N}_q^p$, on peut appeler *comoment* des deux éléments M_p^q, N_p^q le moment des deux premiers éléments de la suite, ou le moment des deux derniers; nous désignerons ce comoment par la notation $((\mathrm{M}_p^q, \mathrm{N}_p^q))$.

Si l'on considère deux systèmes de p points $\mathrm{M}_{\prime}\,\mathrm{M}_{\prime\prime}\ldots$, $\mathrm{N}_{\prime}\mathrm{N}_{\prime\prime}\ldots$, qui définissent les deux éléments M_p^q, N_p^q, on a le théorème des déterminants de γ,

$$\sigma\sigma'((\mathrm{M}_p^q, \mathrm{N}_p^p)) = [\gamma(\mathrm{M}_{\prime}\mathrm{N}_{\prime})].$$

De même, etc. Le comoment de deux éléments identiques est 1; le moment d'un élément et de son transformé est égal à 1. Le comoment de deux éléments est égal à celui de leurs transformés.

Les quantités $\gamma_{\mathrm{L}\mathcal{L}}$ sont des comoments. Si l'on considère un élément M_p^q et un élément de référence A_p^q, on a la suite $\underline{\mathrm{A}}_q^p$, M_p^q, A_p^q, N_q^p; le moment des deux premiers éléments, pris dans l'ordre où ils sont écrits, est la quantité $\underline{u}^{\mathrm{L}}$; le moment des deux premiers est la quantité égale v_{L}; l'une ou l'autre de ces quantités est le comoment des deux éléments M_p^q, A_p^q; on a

$$((\mathrm{M}_p^q, \mathrm{A}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}})) = \sum \mathrm{X}^{\mathcal{L}} \gamma_{\mathcal{L}\mathrm{L}} = \psi_{\mathrm{L}}.$$

60. **Expression du comoment; théorème des comoments.** — Les deux éléments étant définis par p points, on a

$$\sigma\sigma'((\mathrm{M}_p^q, \mathrm{N}_p^q)) = [[\underline{u}_{\prime}^{\mathrm{I}}]].[[\mathrm{Y}_{\prime}^{\mathrm{I}}]];$$

on en déduit

$$((\mathrm{M}_p^q, \mathrm{N}_p^q)) = \sum \mathrm{Y}^{\mathrm{L}} \underline{u}^{\mathrm{L}};$$

les formules de transformation donnent

$$((\mathrm{M}_p^q, \mathrm{N}_p^q)) = \sum\sum \mathrm{X}^{\mathcal{L}} \mathrm{Y}^{\mathrm{L}} \gamma_{\mathcal{L}\mathrm{L}} = \sum \mathrm{Y}^{\mathrm{L}} \psi_{\mathrm{L}} = \psi(\mathrm{X}^{\mathcal{L}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{L}}).$$

61. On peut écrire

$$((\mathrm{M}_p^q, \mathrm{N}_p^q)) = \sum \mathrm{Y}^{\mathrm{L}}((\mathrm{M}_p^q, \mathrm{A}_{\mathrm{L}})) = \sum \mathrm{X}^{\mathcal{L}}((\mathrm{A}_{\mathrm{L}}, \mathrm{N}_p^q)),$$

et c'est le théorème des comoments.

62. La formule donnée au début du n° 60 fait connaître la valeur de l'expression $\sigma\sigma'((M_p^q, N_p^q))$ par des coordonnées $\underline{u}$ et des coordonnées y; au moyen des formules de transformation du n° 38, on obtiendrait la valeur de cette expression en coordonnées x et y; on généraliserait ainsi une formule du n° 38. D'ailleurs, les formules de transformation du n° 38 ont conduit à celles du n° 54, et la formule que l'on obtiendrait équivaut à la dernière formule du n° 60; on pourrait lui donner une forme analogue à celle que la formule du n° 38 a reçue à la fin du n° 54, à l'aide de la fonction ψ.

La formule du n° 38 qui donne $S_0^2\sigma^2$ par un déterminant d'ordre $n+p$ rentre également dans la formule plus générale

$$S_0^2\,\sigma\sigma'((M_p^q, N_p^q)) = (-1)^p \begin{bmatrix} 0 & x_\prime^l \\ y_\prime^\lambda & \Gamma^{l\lambda} \end{bmatrix}.$$

On aurait des remarques analogues à celles du n° 39.

63. **Éléments M_p^q, N_p^q conjugués.** — Les deux éléments M_p^q, N_p^q sont conjugués, ou plutôt le second est conjugué du premier, si le primitif du second est associé au premier, ou encore si le transformé du premier est associé au second; la condition pour que deux éléments soient conjugués est $\sum Y^L \psi_L = 0$; leur comoment est nul. La relation précédente, dans laquelle on suppose les y variables, peut être considérée comme l'équation en éléments associés N_p^q de l'élément M_q^p transformé de M_p^q.

Si les deux systèmes de points $M_\prime M_{\prime\prime} \ldots$, $N_\prime N_{\prime\prime} \ldots$ déterminent deux éléments M_p^q, N_p^q conjugués l'un de l'autre, le déterminant d'ordre $n+p$ du n° 62 est égal à 0; on obtient directement cette relation en écrivant qu'il existe un point du premier élément dont le trope transformé passe par l'autre.

Les éléments M_p^q conjugués d'eux-mêmes, c'est-à-dire les éléments qui sont associés à leur transformé ou à leur primitif, vérifient la relation

$$\psi = 0;$$

ils forment un complexe. La fonction ponctuelle d'un système de p points dont l'élément M_p^q est conjugué de lui-même est égale

à o (nº 54) : le déterminant d'ordre $n+p$ du nº 38 est nul; de même, etc. On aurait des remarques analogues à celles du nº 25.

64. **Coordonnées** γ. — Les coordonnées $\underline{u}^L$ sont les quantités $((M_p^q, A_p^q))$, etc.; comme au nº 26.

§ VI.

65. **Identité des** Δ **pour** $n+1$ **points,** $n+1$ **tropes; etc.** — On peut toujours mettre $n+1$ points ou $n+1$ tropes en équilibre avec des coefficients convenables; il en résulte pour $n+1$ points $MM_{\prime}\ldots$, et $n+1$ tropes $mm'\ldots$ l'identité $[\Delta]=0$. Pour deux systèmes de $n+1$ points, on a une identité analogue avec des γ; etc.

66. **Relation pour** n **points dans un trope, etc.** — Pour n points et n tropes, on a vu que le déterminant des Δ est nul quand les points sont dans un même trope ou quand les tropes passent par un même point. Cela tient à ce que n points dans un trope peuvent être mis en équilibre, etc. Dans le premier cas, la relation linéaire et homogène qui lie les éléments d'une colonne a pour coefficients les coefficients d'équilibre; pour la relation entre les éléments d'une rangée, on peut considérer le trope des points M comme le trope résultant des tropes m, et appliquer le théorème des Δ par rapport à chacun des points M, lesquels sont dans le trope résultant (nº 41). C'est ainsi que, dans la relation qui exprime, au nº 14, que n points sont dans un même trope, les coefficients d'une rangée sont $X_1, X_2, \ldots$, c'est-à-dire les coefficients du trope des n points considéré comme le résultant des tropes a.

67. Pour deux systèmes de n points, le déterminant des γ est nul lorsque les points de l'un des systèmes sont dans un même trope : on expliquerait ce fait comme le précédent; en particulier, la fonction ponctuelle de n points est nulle lorsque les n points sont dans un même trope. De même, etc.

68. **Relation pour** $(p+1)$ **points dans un** M_p^q, **etc.** — Si l'on considère $p+1$ points et $p+1$ tropes, le déterminant des Δ est nul



dans trois cas : en premier lieu, lorsque les $p+1$ points sont dans un même élément M_p^q ; en second lieu, lorsque les $p+1$ tropes passent par un même élément M_q^p ; en troisième lieu, lorsque l'élément M_{p+1} déterminé par les points et l'élément M^{p+1} déterminé par les tropes sont associés. Dans ce dernier cas, nº 57, le déterminant est nul, parce que le point commun peut être considéré comme le point résultant des $p+1$ points affectés de coefficients convenables et doit se trouver dans les $p+1$ tropes; on aurait une explication analogue en considérant le trope commun. En particulier, lorsqu'un élément M_p^q est associé à un élément de référence A_q^p, on a $[x_i^1] = 0$; la relation linéaire et homogène entre les éléments d'une rangée est l'équation du trope remarquable qui passe par les deux éléments.

Lorsqu'on a $p+1$ points appartenant à un élément M_p^q et $p+1$ tropes quelconques, le déterminant des Δ est nul parce qu'on peut mettre les points en équilibre à l'aide de coefficients convenables : ce fait donne la relation linéaire et homogène entre les éléments d'une colonne. Pour obtenir la relation entre les éléments d'une rangée, on remarque qu'un certain trope de l'élément M_{q-1}^{p+1} défini par les $p+1$ tropes passe par les $p+1$ points (p conditions) : on considère ce trope comme le trope résultant des $p+1$ premiers, et l'on applique le théorème des Δ par rapport à chacun des $p+1$ points, lesquels sont dans le trope résultant; en somme, les deux éléments ont un trope commun. C'est ainsi que, dans les relations qui expriment que $p+1$ points appartiennent à un élément M_p^q, les coefficients des rangées sont des X.

Lorsqu'on a $p+1$ points dont l'élément M_{p+1} est conjugué de lui-même et $p+1$ tropes quelconques, le déterminant des Δ n'est généralement pas nul, bien qu'on ait $\sigma = 0$, parce que le moment des deux éléments est alors infini; si l'élément M^{p+1} des tropes est alors associé à l'élément des points, le déterminant est nul, le moment est indéterminé.

69. Si l'on considère deux systèmes de $p+1$ points, le déterminant des γ est nul, soit lorsque les points de l'un des systèmes appartiennent à un même élément M_p^q, soit lorsque les deux éléments M_{p+1} définis par les points sont conjugués l'un de l'autre; on ferait des remarques analogues aux précédentes. En supposant

les deux systèmes de points identiques, on retrouverait des faits connus. De même, etc.

70. Si l'on fait $p = n - 2$, au n° 68, on a $n - 1$ points et $n - 1$ tropes : le déterminant des Δ est nul dans trois cas, dont le plus important est l'association du trope des $n - 1$ points et du point des $n - 1$ tropes.

Pour deux systèmes de $n - 1$ points, n° 69, le déterminant des γ est nul en particulier si les deux tropes déterminés par ces points sont conjugués; etc.

§ VII.

71. Formes compagnes d'une forme quadratique. — Soit la forme quadratique

$$f(zz) = \sum c_{\lambda l} z^\lambda z^l,$$

dans laquelle $c_{\lambda l}$ et $c_{l\lambda}$ sont différents. Considérons le déterminant d des coefficients c supposé différent de 0, et ses mineurs $[c_{\lambda l}]$, les indices étant dans l'ordre naturel. Les formes compagnes seront les formes quadratiques

$${}_pf(zz) = \sum [c_{\lambda l}] z^{\mathfrak{L}} z^{\mathrm{L}},$$

la lettre p indiquant le nombre des indices l ou λ; les deux formes ${}_pf$ et ${}_qf$ seront dites *associées*. Pour $p = n - 1$, on a une forme qui ne diffère de la forme adjointe que par les signes des coefficients : c'est ainsi que la forme $ax^2(b + b')xy + cy^2$ a pour forme compagne $cu^2 + (b + b')uv + av^2$, tandis que la forme adjointe est $c\mathrm{U}^2 - (b + b')\mathrm{UV} + a\mathrm{V}^2$. Pour $p = 0$, on a

$${}_0f = (z_0)^2;$$

pour $p = n$, on a

$${}_nf = d(z^{12\ldots n})^2.$$

Posons, comme au n° **21**, $f(z_{,}z_{,,}) = \sum c_{\lambda l} z_{,}^\lambda z_{,,}^l = \sum z_{,,}^l f_l(z_{,})$; on a

$$\begin{vmatrix} f(z_{,}z_{,}) & f(z_{,}z_{,,}) & \ldots \\ f(z_{,,}z_{,}) & f(z_{,,}z_{,,}) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \frac{(-1)^p}{d} \begin{bmatrix} 0 & z_{,}^l \\ z_{,}^\lambda & \Gamma^{l\lambda} \end{bmatrix} = {}_pf\{[z_{,}^l][z_{,}^\lambda]\},$$



le premier déterminant étant d'ordre p, le second d'ordre $n+p$, et les quantités Γ étant celles qui ont été définies au n° 1 ; en laissant de côté l'expression intermédiaire qui sert seulement à la démonstration, on a une identité remarquable. Cette identité se simplifie quand on suppose $c_{l\lambda}$ nul pour l différent de λ. Pour $p=n$, on peut dire que le premier membre est égal au produit $[z^1_{,}][c_{11}z^1_{,}+c_{21}z^2_{,}+\ldots]$, qui devient $d[z^1_{,}]^2$; une démonstration analogue peut se faire dans le cas général.

72. Formes compagnes d'une forme bilinéaire. — Considérons une forme bilinéaire dont les deux systèmes de variables seront désignés par z et t, savoir :

$$f(z,t)=\sum c_{\lambda l}z^{\lambda}t^{l}.$$

Nous appellerons *formes compagnes* les formes bilinéaires

$$_{p}f(z,t)=\sum [c_{\lambda l}]z^{\mathfrak{L}}T^{L},$$

parmi lesquelles on doit remarquer la forme bilinéaire adjointe. On a une identité analogue à l'identité ci-dessus, les seconds z étant remplacés par des t.

73. Remarque sur la forme adjointe. — Considérons les deux déterminants inverses d et Δ, d n'étant pas nul : les deux formes

$$f(zz)=\sum c_{\lambda l}z^{\lambda}z^{l},\qquad \Phi(Z,Z)=\sum \Gamma^{\lambda l}Z_{\lambda}Z_{l}$$

sont entièrement réciproques. La forme Φ est le quotient par d de la forme $_{n-1}f$, si la variable Z_l est identique à la variable $z^{1\ldots n-l}$ multipliée par $(-1)^l$; la forme compagne $_q\Phi$ est le quotient par d de la forme $_pf$, si l'on a $Z_T=(-1)^{L,T}z^L$.

CHAPITRE V.

PSEUDO-DISTANCE, ETC.

Le σ de deux points est un cas particulier du moment de deux éléments M_p^q, $M_\pi^\varkappa$ (Chap. VII) : pour cette raison nous désignerons ici deux points par M et $\mathfrak{M}$; en Géométrie linéaire, $\Delta(M, m)$ deviendrait $\sigma(M, \mathfrak{M})$. Cette notation est encore en harmonie avec ce fait que le σ de deux points est un cas particulier de la fonction ponctuelle de p points.

§ I.

74. Fonction ponctuelle de deux points, etc. — La fonction ponctuelle de deux points M et $\mathfrak{M}$ est définie par la relation

$$\sigma^2(M, \mathfrak{M}) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma(M, \mathfrak{M}) \\ \gamma(\mathfrak{M}, M) & 1 \end{vmatrix} = 1 - \gamma(M, \mathfrak{M})\gamma(\mathfrak{M}, M);$$

on l'évaluerait par rapport à $\underline{P}$ et P, ou à P seul (n° 32). La fonction tangentielle de deux tropes m et μ a une définition analogue.

Pour deux points dont l'un est conjugué de l'autre, l'un des γ est nul et l'on a généralement $\sigma^2 = 1$. On peut remarquer à ce propos que, pour la fonction ponctuelle de p points, dont le carré est défini par un déterminant de γ, si les éléments situés d'un côté de la diagonale principale sont nuls, on a $\sigma^2 = 1$.

75. Rayons et axes. — Un rayon est un lieu de points dépendant d'un paramètre; un rayon dirigé est défini par deux points dirigés M et $\mathfrak{M}$ avec le signe du σ de ces deux points; ses coordonnées (n° 53) sont des quantités dont le type est

$$x^{12} = \frac{x^1\xi^2 - x^2\xi^1}{\sigma\Sigma_{12}}.$$

Un axe, etc.

76. Composition de deux points, etc. — Si l'on considère trois points $M_{\prime}MM_{\prime\prime}$ situés sur un même rayon, le point M peut être considéré comme le point résultant des deux points $M_{\prime\prime}$ et $M_{\prime}$ affectés des coefficients $\sigma(M_{\prime}M)$ et $\sigma(MM_{\prime\prime})$ et on doit l'affecter lui-même du coefficient $\sigma(M_{\prime}M_{\prime\prime})$.

Nous ferons d'abord la remarque suivante; étant pris sur un rayon dirigé deux points conjugués M et N que l'on dirige pour avoir $\sigma(M, N) = 1$ et un point $\mathfrak{M}$ du rayon, en écrivant $M\mathfrak{M}N$ on voit que le point $\mathfrak{M}$ affecté du coefficient 1 est le point résultant des points N et M affectés des coefficients $\sigma(M, \mathfrak{M})$ et $\sigma(\mathfrak{M}, N)$: en prenant les γ par rapport au point M, on trouve $\gamma(M\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M}N)$; on a de même $\sigma(\mathfrak{L}, M) = \gamma(M, \mathfrak{M})$, les points $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ étant conjugués sur le rayon et dirigés pour que $\sigma(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = 1$. En résumé, on a

$$\sigma(\mathfrak{L}, M) = \gamma(M, \mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M}, N) \quad \text{avec} \quad \sigma(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = 1, \quad \sigma(M, N) = 1.$$

Cette remarque étant faite, si nous considérons sur un rayon deux points $M_{\prime}$ et $M_{\prime\prime}$ affectés des coefficients $k_{\prime}$ et $k_{\prime\prime}$ et le point résultant M affecté de son coefficient k, en prenant les γ par rapport au point $\mathfrak{N}$ du rayon qui est conjugué d'un point $\mathfrak{M}$ de ce rayon, on trouve

$$k\sigma(\mathfrak{M}, M) = k_{\prime}\sigma(\mathfrak{M}, M_{\prime}) + k_{\prime\prime}\sigma(\mathfrak{M}, M_{\prime\prime}) :$$

c'est le théorème des σ. En prenant $k = 1$, on peut écrire la formule

$$\sigma(\mathfrak{M}M) = \frac{\sigma(MM_{\prime\prime})}{\sigma(M_{\prime}M_{\prime\prime})}\sigma(\mathfrak{M}M_{\prime}) + \ldots$$

qui rappelle l'expression de Δ. Le théorème des déterminants de γ pour deux couples de points à un même rayon donne

$$\begin{vmatrix} \sigma(M_{\prime}\mathfrak{M}) & \sigma(M_{\prime}M) \\ \sigma(M_{\prime\prime}\mathfrak{M}) & \sigma(M_{\prime\prime}M) \end{vmatrix} = \sigma(M_{\prime}M_{\prime\prime})\,\sigma(\mathfrak{M}M).$$

Ces deux relations équivalent à celle-ci

$$\sigma(\mathfrak{M}M)\,\sigma(M_{\prime}M_{\prime\prime}) + \ldots + \ldots = 0$$

en permutant $MM_{\prime}M_{\prime\prime}$.

Les coefficients des trois points $MMM_{\prime\prime}$ étant $\sigma(M_{\prime}M_{\prime\prime})$, etc., en prenant les γ par rapport au point M, on a encore, comme au

n° 50,

$$\sigma(M_{,}M_{''}) = \sigma(M_{,}M)\gamma(MM_{''}) + \sigma(MM_{''})\gamma(MM_{,});$$

si l'on prend aussi les γ par rapport à $M_{''}$ et à $M_{,}$, on arrive à la formule

$$\sigma^2(M_{,}M_{''}) = \sigma^2(M_{,}M) + \sigma^2(MM_{''}) + \sigma(M_{,}M)\,\sigma(MM_{''})[\gamma(M_{,}M_{''}) + \gamma(M_{''}M_{,})].$$

77. Pseudo-distance $\overline{M\mathfrak{M}}$, etc. — Pour deux points dirigés, nous définirons la pseudo-distance $\overline{M\mathfrak{M}}$ au signe près, et à $2k\pi$ près, par la relation

$$\frac{\gamma(M,\mathfrak{M})+\gamma(\mathfrak{M},M)}{2} = \cos(\overline{M,\mathfrak{M}});$$

si l'on change le sens de l'un des points, $\cos(\overline{M,\mathfrak{M}})$ change de signe. On a

$$\cos(\overline{M\mathfrak{M}}) = X^1\Xi^1 + \ldots + X^1\Xi^2\cos(\overline{A_1A_2}) + \ldots.$$

La relation $\varphi = 1$ est $\cos(\overline{MM}) = 1$, et l'on a l'équation de S en remplaçant 1 par 0. On pourrait calculer $\sin^2\overline{M\mathfrak{M}}$ et examiner les cas où ce sinus est nul.

On a pour la composition des points

$$k\cos(\overline{OM}) = k_{,}\cos(\overline{OM_{,}}) + \ldots,$$
$$k^2 = k_{,}^2 + \ldots + 2k_{,}k_{''}\cos(M_{,}M_{''}) + \ldots.$$

On a encore (n° 50)

$$\sigma^2 = \sigma_{,}^2 + \ldots + 2\sigma_{,}\sigma_{''}\cos(M_{,}M_{''}) + \ldots.$$

De même, etc.

78. Un cosinus est un γ relatif à une correspondance par polaires réciproques dont l'équationnelle double serait S (Chap. IX). Cherchons la liaison entre $\overline{M\mathfrak{M}}$ et S. Étant donnés deux points M et $\mathfrak{M}$, le rayon $M\mathfrak{M}$ rencontre l'équationnelle double $\varphi = 0$ en deux points Ω et Ω'; évaluons le rapport anharmonique

$$R = (M\mathfrak{M}\Omega\Omega') = \frac{\sigma(\Omega,M)}{\sigma(\Omega,\mathfrak{M})} : \frac{\sigma(\Omega',M)}{\sigma(\Omega',\mathfrak{M})}.$$

Posons $\frac{\sigma(\Omega,M)}{\sigma(\Omega,\mathfrak{M})} = k$: le point Ω est le point résultant des points

M et $\mathfrak{M}$ affectés des coefficients 1 et $-k$, ce qui donne pour les coordonnées homogènes de ce point les valeurs $x^1 - k\xi^1$, etc.; écrivons que ces coordonnées vérifient la relation $\varphi = 0$, nous aurons $k^2 - 2k\cos\overline{M\mathfrak{M}} + 1 = 0$, qui donne les valeurs de k pour les deux points Ω et Ω'; appelons k celle qui répond au point Ω, l'autre sera $\frac{1}{k}$, et nous aurons $R = k^2$: nous prendrons $\sqrt{R} = k$; on peut écrire

$$\sqrt{R} = \cos(\overline{M\mathfrak{M}}) + i\sin(\overline{M\mathfrak{M}}) = e^{\overline{M\mathfrak{M}}\,i}$$

en disposant du signe de $M\mathfrak{M}$. On a finalement

$$\overline{M\mathfrak{M}} = \frac{1}{i}\log\sqrt{R},$$

que l'on doit regarder comme donnant la définition de la pseudo-distance; on en conclut $\overline{M_{\prime}M} + \overline{MM_{\prime\prime}} = \overline{M_{\prime}M_{\prime\prime}}$. Quand on change l'ordre des deux points, la pseudo-distance change de signe; quand on change le sens de l'un des deux points, la pseudo-distance augmente de π.

79. **Paramètre θ d'un rayon, etc.** — Soit un rayon dirigé; pour deux points M et $\mathfrak{M}$ de ce rayon, on a facilement

$$\frac{\gamma(M\mathfrak{M}) - \gamma(\mathfrak{M}M)}{2\sigma(M\mathfrak{M})} = X^{12}\frac{\gamma_{12} - \gamma_{21}}{2\sigma_{12}} + \ldots = -\cos\theta,$$

et nous dirons que θ est le paramètre du rayon dirigé; on a

$$\cos\theta = \frac{x^{12}}{\eta^{12}}\cos\theta_{12} + \ldots,$$

en appelant θ_{12} le paramètre du rayon A_1A_2. Un rayon dirigé est défini par deux points dirigés M et $\mathfrak{M}$, avec le signe du σ; θ est alors déterminé au signe près; on change le signe du σ en remplaçant θ par $\theta + \pi$, et ce fait se comprendra dans un instant : il en résulte que, quand on parle d'un rayon dirigé, il s'agit du choix à faire entre θ et $\pi + \theta$.

On obtiendra de même le paramètre Θ d'un axe dirigé.

80. **Fonctions σ et Σ.** — Les deux relations qui définissent

$\cos \overline{M\mathfrak{M}}$ et $\cos\theta$ donnent

$$\gamma(M\mathfrak{M}) = \cos \overline{M\mathfrak{M}} - \sigma(M\mathfrak{M})\cos\theta,$$
$$\gamma(\mathfrak{M}M) = \cos \overline{M\mathfrak{M}} + \sigma(M\mathfrak{M})\cos\theta;$$

en multipliant et en remplaçant le produit des γ par $1 - \sigma^2$, on a

$$\sigma(M\mathfrak{M}) = \frac{\sin \overline{M\mathfrak{M}}}{\sin\theta},$$

en disposant du signe de $\sin\theta$. De même, etc.

On doit remarquer avec soin qu'une pseudo-distance est un élément relatif à la seule équationnelle S : il est bien vrai qu'on a défini cette quantité en considérant des σ, mais le rapport anharmonique de quatre points conserve la même expression quelle que soit la corrélation étudiée, et la pseudo-distance ne dépend réellement que de l'équationnelle S; au contraire, un σ est lié à l'ensemble de la corrélation.

81. En général, la pseudo-distance de deux points dont l'un appartient à l'équationnelle S est infinie, parce que le rapport anharmonique dont elle dérive est alors nul ou infini; il en est de même du σ de ces deux points. De même, etc.

On a

$$\frac{\cos(M\mathfrak{M})}{1} = \frac{\sin(M\mathfrak{M})}{i} = \frac{1}{0}.$$

82. Fonctions γ et Γ. — On a

$$\gamma(M\mathfrak{M}) = \frac{\sin(\theta - \overline{M\mathfrak{M}})}{\sin\theta} = \sigma(\theta - \overline{M\mathfrak{M}}),$$
$$\gamma(\mathfrak{M}M) = \frac{\sin(\theta + \overline{M\mathfrak{M}})}{\sin\theta} = \sigma(\theta + \overline{M\mathfrak{M}}).$$

Si deux points M et N sont conjugués sur le rayon, on a $\gamma(MN) = 0$, $\overline{MN} = \theta$ ou $\theta + \pi$, selon le sens dans lequel le point N est dirigé, et nous supposerons dans ce qui suit $\overline{MN} = \theta$; on peut dire alors que le paramètre θ d'un rayon est la pseudo-distance d'un point M à son conjugué N sur le rayon considéré, et l'on a $\sigma(MN) = 1$. On a encore

$$\sigma(\mathfrak{L}M) = \gamma(M\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M}N)$$

avec $\mathcal{L}\mathfrak{M} = \text{MN} = \theta$. Si l'on écrit

$$\gamma(\text{M}\,\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M}\,\text{N}), \qquad \sigma(\text{L}'\mathfrak{M}) = \gamma(\mathfrak{M}\,\text{M})$$

avec $\text{L}'\text{M} = \text{MN} = \theta$, on voit que la différence entre les deux γ tient à ce que L′ et N sont distincts.

Sur un rayon, il y a homographie entre deux points M et N dont le second est conjugué du premier : les points doubles sont les points Ω et Ω'; et en effet, la pseudo-distance $\overline{\text{MN}}$ est constante, le rapport anharmonique $(\Omega\Omega'\text{MN})$ est constant, et cela correspond bien à une homographie dont les points doubles sont Ω et Ω'.

83. **Rayons conjugués d'eux-mêmes.** — Un rayon est conjugué de lui-même s'il est associé à l'axe transformé, et par suite à l'axe primitif : les deux points d'association sont les points $\Omega\Omega'$ où le rayon rencontre l'équationnelle double S, attendu que ces points sont conjugués d'eux-mêmes. Un axe est conjugué de lui-même, etc. Si l'on considère un rayon conjugué de lui-même et l'axe transformé qui est aussi conjugué de lui-même, le point d'association Ω est sur l'équationnelle S, le trope d'association ω est tangent à l'équationnelle s.

Un rayon conjugué de lui-même a un paramètre θ dont le sinus et le cosinus sont infinis, ce qui revient à ceci : $\tang\theta = \pm i$. En effet, si l'on prend un point M sur le rayon, le trope transformé qui doit contenir l'axe transformé passe par l'un des points $\Omega\Omega'$, le conjugué N de M sur le rayon est l'un des points $\Omega\Omega'$, et la quantité $\sin \text{MN}$ ou $\sin\theta$ est infinie. Il en résulte que, sur un pareil rayon, le σ de deux points est nul, comme valeur d'une fraction dont le dénominateur est infini, pourvu qu'aucun des deux points ne soit Ω ou Ω'; c'est un cas particulier d'un fait général relatif à la fonction ponctuelle de p points dans un élément M_p^q conjugué de lui-même.

Le γ de deux points M et $\mathfrak{M}$ sur un rayon conjugué de lui-même a pour valeur

$$\cos(\text{M}\,\mathfrak{M}) - \cot\theta \sin(\text{M}\,\mathfrak{M}),$$

c'est-à-dire

$$\cos(\text{M}\,\mathfrak{M}) + i\sin(\text{M}\,\mathfrak{M}) \quad \text{ou} \quad \sqrt{\text{R}},$$

en supposant $\tang\theta = i$; on a de même

$$\gamma(\mathfrak{M}\,\text{M}) = \frac{1}{\sqrt{\text{R}}}.$$

Dans le cas particulier où l'on considère sur un rayon conjugué de lui-même deux points M et N dont l'un, M, appartient à l'équationnelle double S, le σ est indéterminé. (On verra plus loin que les deux points M et N sont conjugués : en particulier, si l'on se donne M, le rayon est dans le trope transformé ou dans le trope primitif de M; on peut dire que le σ de deux points conjugués, lequel est généralement égal à 1, est indéterminé quand l'un des points est sur S.)

Nous devons ajouter ici que la pseudo-distance de deux points confondus en un point de S est indéterminée; il en est de même du σ.

84. Les rayons conjugués d'eux-mêmes donnent une définition géométrique du trope transformé et du trope primitif d'un point M. En effet, si l'on considère un rayon conjugué de lui-même issu du point M, et qui perce l'équationnelle double S aux deux points Ω et Ω', l'axe transformé du rayon le rencontre par exemple en Ω : comme le point M est sur le rayon, le trope transformé n doit passer par l'axe et en particulier par le point Ω; il en résulte que les rayons conjugués d'eux-mêmes issus du point M rencontrent l'équationnelle double S en des points situés dans deux tropes qui sont le primitif et le transformé du point M. Cette définition suppose seulement que l'on connaît le complexe des rayons conjugués d'eux-mêmes. En Géométrie plane, dans l'espace réel, les rayons ne sont autre chose que les tropes qui sont d'ailleurs des lignes droites; on a deux coniques doubles S et s, doublement tangentes et formant ce qu'on peut appeler un *duplex* (faire la figure pour des contacts imaginaires) : étant donné un point M, on mène de ce point les deux tangentes à la conique s, elles coupent la conique S en quatre points $OO'\Omega\Omega'$, et si $O\Omega$ sont les points transformés des tangentes, la droite $O\Omega$ est la droite n transformée du point M tandis que la droite $O'\Omega'$ est la droite primitive l.

De même, si l'on considère dans un trope les axes conjugués d'eux-mêmes, par chacun de ces axes on peut mener à l'équationnelle s deux tropes tangents ω et ω' : si l'on appelle ω le trope d'association de l'axe et du rayon primitif, l'enveloppe des tropes ω est le point primitif du trope donné.

Si l'on considère un point M et le trope transformé n, les rayons

conjugués d'eux-mêmes issus de M avec leurs points Ω dans le trope n, et les axes conjugués d'eux-mêmes dans le trope n avec leurs tropes ω passant par M, les points Ω sont les points d'association des rayons et des axes, les tropes ω sont leurs tropes d'association. Par exemple, dans l'espace réel, on a un point M et un plan n : les rayons conjugués d'eux-mêmes issus de M forment un cône du second degré, dont la trace sur le plan n est une conique Ω lieu des points conjugués d'eux-mêmes dans le plan n; les axes conjugués d'eux-mêmes dans le plan n forment une conique, et le cône ω de sommet M qui a cette conique pour base est l'enveloppe des plans tangents conjugués d'eux-mêmes issus de M; les deux coniques dans le plan n forment un duplex; à chaque rayon issu de M et faisant partie du cône des rayons conjugués d'eux-mêmes, correspond dans le plan n un axe transformé qui lui est associé : le point d'association est sur la conique Ω, le plan d'association est tangent au cône ω.

Lorsque le point M est sur l'équationnelle double S, les rayons conjugués d'eux-mêmes issus de ce point sont ceux des deux tropes qui sont le transformé et le primitif du point M, et qui passent en M; on peut le voir directement : en effet, un rayon conjugué de lui-même issu de M est associé à l'axe primitif, le point d'association étant M, ou à l'axe transformé, le point d'association étant M; dans le premier cas, le point M étant sur l'axe primitif du rayon, le trope transformé n passe par le rayon; dans le second cas, etc.

85. Les faits précédents peuvent être généralisés. On vient de voir que, si l'on considère un point M et son trope transformé, les rayons conjugués d'eux-mêmes issus de M donnent, par intersection avec le trope transformé, des points conjugués d'eux-mêmes. Si l'on considère un point M et son trope transformé, les éléments M_{P+1}^{Q} conjugués d'eux-mêmes qui sont issus du point donnent, par intersection avec le trope transformé, des éléments M_{P}^{Q+1} conjugués d'eux-mêmes. Lorsque le point M est en Ω sur l'équationnelle double S, on remarque que tout élément M_{P+1} mené par Ω dans le trope transformé, ou dans le trope primitif, est conjugué de lui-même; mais on n'a pas là tous les éléments M_{P+1} conjugués d'eux-mêmes et passant par Ω. De même, etc. Plus généralement,

on pourrait considérer un élément M_α et son transformé M^α : les éléments $M^Q_{\alpha+P}$ conjugués d'eux-mêmes et passant par M_α donnent, par intersection avec M^α, des éléments $M^{\alpha+Q}_P$ conjugués d'eux-mêmes ; la figure relative au cas de la Géométrie plane dans l'espace réel donne un schéma qui peut aider à l'intelligence de ces faits.

On a employé ici les notations du Chapitre VIII.

86. Étant donné un point M, le lieu des points N qui donnent $\gamma(MN) = 0$ ou $\gamma(NM) = 0$ se compose du trope transformé et du trope primitif de M ; or, on a vu que, parmi ces points, se trouvent les points où les rayons conjugués d'eux-mêmes issus de M rencontrent l'équationnelle S : l'accord de ces deux faits résulte de ce que les rayons conjugués d'eux-mêmes issus de M vont passer par les points où l'équationnelle S est coupée par le trope transformé et par le trope primitif du point M.

Étant donné un point M, on peut considérer le lieu des points $\mathfrak{M}$ tels que l'on ait $\sigma(M\mathfrak{M}) = 0$: ce lieu est l'ensemble des rayons conjugués d'eux-mêmes issus de M, σ étant nul parce que le sinus du paramètre est infini ; ce doit donc être l'équationnelle conique du second degré, passant par les points communs à l'équationnelle double S et aux deux tropes qui sont le primitif et le transformé du point M. Et, en effet, on a pour les points du lieu $1 - \gamma(M\mathfrak{M})\gamma(\mathfrak{M}M) = 0$, d'où l'équation du lieu

$$\varphi(X, X)\,\varphi(\Xi, \Xi) - \varphi(X, \Xi)\,\varphi(\Xi, X) = 0.$$

87. **Rayons à paramètre $\frac{\pi}{2}$.** — Les rayons dont le paramètre θ est égal à $\frac{\pi}{2}$ forment un complexe du premier degré dont on a l'équation en faisant $\cos\theta = 0$ dans la formule du n° 79. Sur un pareil rayon, on a

$$\overline{L'M} = \overline{MN} = \frac{\pi}{2},$$

par suite

$$\overline{L'N} = \pi,$$

c'est-à-dire que les points L′ et N sont un même point dirigé des deux façons : le trope primitif et le trope transformé d'un point

du rayon coupent le rayon au même point ; on a alors

$$\gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M}) = \gamma(\mathfrak{M}\mathrm{M}),$$

et cela résulte de ce qu'on a

$$\gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M}\mathrm{N}), \qquad \gamma(\mathfrak{M}\mathrm{M}) = \sigma(\mathrm{L}'\mathfrak{M}),$$

avec

$$\overline{\mathrm{L}'\mathfrak{M}} + \overline{\mathfrak{M}\mathrm{N}} = \pi.$$

Observons d'ailleurs que l'hypothèse

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

équivaut à l'hypothèse

$$\mathrm{R}(\mathrm{MN}\Omega\Omega') = -1 :$$

les points M et N sont alors conjugués harmoniques par rapport aux points $\Omega\Omega'$. De chaque point M de l'hyperespace partent des rayons à paramètre $\frac{\pi}{2}$, lesquels vérifient une condition : ce sont les rayons associés à l'axe qui est l'intersection du trope primitif et du trope transformé du point M ; ils sont dans un même trope, parce que le complexe est du premier degré. De même, etc.

Dans le cas d'une corrélation plane, dans l'espace réel, les rayons à paramètre $\frac{\pi}{2}$ passent par un point fixe F dont les coordonnées homogènes x sont les quantités $\cos\theta_{23}$, $\cos\theta_{31}$, $\cos\theta_{12}$: ce point est le pôle de la corde de contact des deux coniques du duplex ; en effet, la droite primitive et la droite transformée d'un point M coupent le rayon FM en un même point N, et le rapport anharmonique des deux points M et N et des deux points où le rayon MN rencontre la conique S est égal à -1, ce qui donne bien $\frac{\pi}{2}$ pour la pseudo-distance MN. D'après la formule du n° 79, le cosinus du paramètre d'un rayon est proportionnel au Δ du point F et du rayon ; le facteur qui multiplie Δ est le facteur normalisant des coordonnées du point F : on verra (n°s 89, 90) que ce facteur est le cosinus du paramètre du plan. De même, les axes ou points à paramètre $\frac{\pi}{2}$ sont sur une droite fixe φ, qui est la corde de contact des deux coniques du duplex, et le cosinus du para-

mètre d'un point est proportionnel au Δ de ce point et de la droite φ.

Nous ajouterons la remarque suivante : La formule du n° 79, écrite en coordonnées homogènes, montre que $\cos\theta$ est indéterminé pour les rayons R qui font partie à la fois du complexe des rayons conjugués d'eux-mêmes et du complexe des rayons à paramètre $\frac{\pi}{2}$. Si l'on considère les rayons pour lesquels θ a une valeur donnée, le complexe de ces rayons contient les rayons R ; cela a lieu en particulier dans l'hypothèse $\theta = 0$, c'est-à-dire lorsque le rayon est tangent à l'équationnelle S ; il en résulte que les rayons R sont des rayons tangents à l'équationnelle S.

88. **Équationnelles remarquables du second degré.** — Je signalerai ici le lieu des points dont le σ avec un point fixe a une valeur constante. Le point fixe étant désigné par M et le point mobile par $\mathfrak{M}$, on doit avoir $\sigma^2 = k^2$ ou

$$\gamma(M\mathfrak{M}).\gamma(\mathfrak{M}M) = (1-k^2)\gamma(MM).\gamma(\mathfrak{M}\mathfrak{M});$$

le lieu est une équationnelle du second degré passant par les points communs à l'équationnelle double S et aux deux tropes primitif et transformé du point M : cela tient à ce que le σ de deux points conjugués dont l'un est sur S est indéterminé. Pour $k = 0$, on a l'équationnelle conique signalée au n° 86. On aurait à considérer également l'enveloppe des tropes dont le Σ avec un trope fixe a une valeur constante.

Le lieu des points dont le Δ avec un trope fixe a une valeur constante est une équationnelle du second degré circonscrite à S, le trope de contact étant le trope donné ; le lieu des points dont le γ avec un point fixe a une valeur constante est une équationnelle du second degré circonscrite à S, le trope de contact étant le primitif ou le transformé du point fixe. L'enveloppe des tropes dont le Δ avec un point fixe a une valeur constante est une équationnelle du second degré circonscrite à s ; etc.



NOTE.

α. Dans l'étude du rapport anharmonique $(\mathrm{M}\mathfrak{M}\Omega\Omega')$ on a à considérer les différents cas où des points viennent à se confondre. En laissant de côté le cas où les points M et $\mathfrak{M}$ se confondent, on peut avoir ces trois cas :

M et Ω confondus,

Ω et Ω' confondus,

$\mathrm{M}, \Omega, \Omega'$ confondus.

Dans le premier cas, la pseudo-distance des deux points M et $\mathfrak{M}$ dont l'un appartient à S est généralement infinie.

Dans le second cas, le rayon qui joint les points M et $\mathfrak{M}$ est tangent à S, et la pseudo-distance est généralement nulle.

Dans le troisième cas, la pseudo-distance est indéterminée.

β. Au point de vue du paramètre d'un rayon, on a trois cas remarquables déduits de ce qui précède.

Le rayon peut être conjugué de lui-même, et alors le paramètre est généralement infini.

Le rayon peut être tangent à S et alors le paramètre est généralement nul.

Le rayon peut être à la fois conjugué de lui-même et tangent à S, et alors le paramètre est indéterminé $\left(\text{ces rayons font partie des rayons à paramètre } \frac{\pi}{2}\right)$.

γ. Le σ de deux points M et $\mathfrak{M}$ étant le quotient du sinus de leur pseudo-distance par le sinus du paramètre θ du rayon qui les contient, on a le Tableau suivant dans les cases duquel on a marqué les pseudo-distances.

	M ET $\mathcal{M}$ QUELCONQUES.	M OU $\mathcal{M}$ SUR S.
Rayon quelconque $\sin\theta = \frac{a}{b}$.	$\frac{a}{b}$.	∞.
Rayon auto-conjugué $\sin\theta = \infty$.	$\frac{a}{b}$.	∞.
Rayon tangent à S $\sin\theta = 0$.	o.	$\frac{0}{0}$.
Rayon auto-conjugué et tangent à S $\sin\theta = \frac{0}{0}$.	o.	$\frac{0}{0}$.

Sur un rayon quelconque, on a alors $\sigma = \frac{A}{B}$ pour deux points quelconques, et $\sigma = \frac{\infty}{B}$ pour deux points dont l'un est sur S (n° 81).

Sur un rayon auto-conjugué, dont le paramètre est infini, on a $\sigma = \frac{A}{\infty}$ pour deux points quelconques, et $\sigma = \frac{\infty}{\infty}$ pour deux points dont l'un est sur S (n° 83).

Sur un rayon tangent à S la formule $\sigma(M\mathcal{M}) = \frac{\sin(\overline{M\mathcal{M}})}{\sin\theta}$ est illusoire.

δ. Si l'on calcule $\sin(M\mathcal{M})$ d'après la formule du n° 77, on a

$$\sin^2(M\mathcal{M}) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(M\mathcal{M}) \\ \cos(M\mathcal{M}) & 1 \end{vmatrix} = \ldots,$$

et si l'on introduit des facteurs normalisants en supposant les coordonnées homogènes, on retrouve les quatre cas possibles pour $\sin(M\mathcal{M})$.

La formule du n° 79 permettrait de calculer $\sin\theta$, etc.

Pour σ, si dans la relation entre les coordonnées d'un rayon on remplace ces coordonnées par leurs expressions données au n° 75, on obtient avec des coordonnées homogènes une formule qui donne les quatre cas possibles.

ε. Pour deux points confondus, la pseudo-distance est généralement



nulle, et il en est de même du σ; toutefois, pour deux points confondus en un point de S, il y a indétermination.

φ. Dans le cas d'une correspondance par polaires réciproques, on a ceci :

	M ET $\mathfrak{M}$ QUELCONQUES.	M OU $\mathfrak{M}$ SUR S.
Rayon quelconque.	$\sigma = \frac{a}{b}$.	$\sigma = \infty$.
Rayon tangent à S.	$\sigma = 0$.	$\sigma = \frac{0}{0}$.

Pour le dernier cas on peut dire que le σ de deux points conjugués, lequel est généralement égal à 1, est indéterminé quand un des deux points est sur S.

§ II.

89. **Développement remarquable de s_0^2.** — Considérons le déterminant s_0^2 du n° 4, c'est-à-dire le déterminant des γ fournis par les points de référence. D'après le n° 80 on a $\gamma_{12} = \cos 12 - k_{12}$ et $\gamma_{21} = \cos 12 + k_{12}$ en posant $k_{12} = \sigma_{12} \cos \theta_{12}$; dans le déterminant transformé avec cette écriture, les éléments sont les sommes des éléments correspondants d'un déterminant symétrique et d'un déterminant gauche : comme il ne change pas quand on change simultanément les signes de tous les k, son développement ne contient que des termes où le nombre des k est pair (*voir* Salmon, *Algèbre supérieure,* n° 40). Pour effectuer ce développement, nous désignerons par $k_{12\ldots 2p}$ le Pfaffien $k_{12}k_{34}\ldots k_{2p-1,2p} + \ldots$ qui est la racine carrée du déterminant gauche d'ordre $2p$

$$\begin{vmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} & \ldots \\ k_{21} & 0 & k_{23} & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{vmatrix};$$

le nombre des termes du Pfaffien est $1.3.5\ldots 2p-1$. On a par exemple

$$k_{12} = k_{12}, \qquad k_{1234} = k_{12}k_{34} + k_{13}k_{42} + k_{14}k_{23}.$$

Cela posé, on considère le déterminant Δ d'ordre n formé avec les cosinus, et les formes compagnes relatives à ce déterminant, en notant les variables comme au nº 73 : ${}_pf = \sum c_{\mathrm{L}\mathcal{L}} \mathrm{Z}_\mathrm{T} \mathrm{Z}_{\mathfrak{T}}$, le nombre des indices l étant p; et l'on a

$$s_0^2 = \Delta + {}_{n-2}f(k_{12}, \ldots) + {}_{n-4}f(k_{1234}, \ldots) + \ldots;$$

si n est pair, le dernier terme est un carré.

Pour $n = 3$ (Géométrie plane) on a facilement

$$s_0^2 = \Delta + s_0^2 \left(\frac{\cos\theta_{13}}{h^1} \frac{\cos\theta_{23}}{h^1} + \ldots + 2 \frac{\cos\theta_{23}}{h^1} \frac{\cos\theta_{13}}{h^2} \cos 12 + \ldots \right);$$

or, les quantités $\cos\theta_{23} \ldots$ sont alors les coordonnées homogènes x du pôle F de la corde de contact des deux coniques du duplex; il en résulte que le facteur normalisant de ces coordonnées est

$$\sqrt{1 - \frac{\Delta}{s_0^2}}.$$

§ III.

90. **Paramètres d'un élément** M_p^q. — J'indique ici une idée qui s'est présentée à moi quand ce travail était près d'être terminé, et dont je n'ai pu profiter pour l'ensemble de l'Ouvrage.

Le paramètre d'un rayon M_2 peut être défini par la relation

$$\sin^2\theta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos\overline{\mathrm{M}\mathfrak{M}} \\ \cos\overline{\mathfrak{M}\mathrm{M}} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M}) \\ \gamma(\mathfrak{M}\mathrm{M}) & 1 \end{vmatrix}}.$$

On peut se demander si, dans un élément fixe M_p^q où l'on prend p points quelconques, le déterminant qui a pour éléments les cosinus des pseudo-distances des points deux à deux, et le déterminant qui a pour éléments les γ des points pris deux à deux, sont dans un rapport constant.

Pour n points on a (par un calcul qui ne diffère pas de celui

du n° 29) à l'aide des formules du n° 26

$$\begin{vmatrix} \gamma(M_{\prime}M_{\prime}) & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{\prime}^{1} & X_{\prime}^{2} & \dots \\ X_{\prime\prime}^{1} & X_{\prime\prime}^{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \gamma(M_{\prime}A_{1}) & \gamma(M_{\prime}A_{2}) & \dots \\ \gamma(M_{\prime\prime}A_{1}) & \gamma(M_{\prime\prime}A_{2}) & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X_{\prime}^{1} & X_{\prime}^{2} & \dots \\ X_{\prime\prime}^{1} & X_{\prime\prime}^{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}^{2} \times \begin{vmatrix} \gamma(A_{1}A_{1}) & \gamma(A_{1}A_{2}) & \dots \\ \gamma(A_{2}A_{1}) & \gamma(A_{2}A_{2}) & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Or, les formules du n° 26 restent exactes en remplaçant les γ par des cosinus; il en résulte que, dans la relation précédente, on peut également remplacer les γ par des cosinus; on en déduit

$$\frac{[\cos(\overline{M_{\prime}M_{\prime}})]}{[\gamma(M_{\prime}M_{\prime})]} = \text{const.} = \sin^{2}\omega,$$

en appelant ω une constante qui sera le paramètre ponctuel de M_{n}^{0}. On aurait un paramètre tangentiel Ω pour M_{0}^{n}.

[Au n° 87, pour une corrélation plane ($n = 3$), on a obtenu pour le paramètre d'un rayon une relation qui peut s'écrire (n° 89)

$$\cos\theta = \Delta(\text{FR}) \times \cos\omega;$$

je suis d'ailleurs arrivé à l'idée que j'indique ici, en observant que la quantité $\frac{\Delta}{s_{0}^{2}}$ du n° 89, relative au triangle de référence, doit être la même quel que soit ce triangle.]

Pour p points $M_{\prime}M_{\prime\prime}\dots$, dans un M_{p}^{q} donné, nous emploierons une méthode qui pourrait être utilisée systématiquement pour l'étude d'un élément M_{p}^{q}. En considérant les points comme les points résultants de p points A, B, C, ... de l'élément, affectés de coefficients $a'b'c'\dots$, $a''b''c''\dots$, etc., on aura

$$[\gamma(M_{\prime}M_{\prime})] = [a']^{2} \times [\gamma(AA)],$$

et une formule analogue avec des cosinus. On en conclut

$$\frac{[\cos(\overline{M_{\prime}M_{\prime}})]}{[\gamma(M_{\prime}M_{\prime})]} = \text{const} = \sin^{2}\varphi,$$

en appelant φ une constante qui sera le *paramètre ponctuel* de l'élément M_{p}^{q}. Cet élément aurait aussi un *paramètre tangentiel* Φ, en considérant q tropes de l'élément.

L'élément M_0^q a un paramètre tangentiel Ω, l'hyperespace M_n^0 a un paramètre ponctuel ω. Un point a un paramètre tangentiel, un trope a un paramètre ponctuel. Le paramètre ponctuel d'un rayon a été désigné par θ; le paramètre tangentiel d'un axe a été désigné par Θ.

Si l'on écrit

$$[\gamma(M,M_{\prime})] = \frac{[\cos(\overline{M,M_{\prime}})]}{\sin^2\varphi},$$

on voit que la fonction ponctuelle de p points dans un élément M_p^q, relativement à la corrélation étudiée, est égale (nº 78) à la fonction ponctuelle relative à une correspondance par polaires réciproques dont l'équationnelle double serait S, divisée par le sinus du paramètre ponctuel de l'élément M_p^q. De même, etc.

On trouverait sans doute pour $\cos\varphi$ une formule analogue à celle du nº 79 pour $\cos\theta$.

[J'ajouterai ceci, en considérant une corrélation générale dans l'espace réel. Soit un tétraèdre ABCD; appelons α le point dont le plan transformé est BCD, β le point du plan BCD dont le plan transformé passe par CD, γ le point du rayon CD dont le plan transformé passe en D; appelons α' le point dont le plan polaire par rapport à S (quadrique des points doubles de la corrélation) est BCD, β' le point du plan BCD dont le plan polaire par rapport à S passe par CD; les droites $A\alpha$ et $A\alpha'$ percent le plan BCD en I et I', les droites $B\beta$ et $B\beta'$ rencontrent CD en J et J'; la droite $\alpha\alpha'$ coupe le plan BCD en I'', la droite $\beta\beta'$ coupe CD en J''. On a (nº 109)

$$\sigma(A, B, C, D) = \sigma(C, D) \times (B, CD) \times (A, BCD),$$

ou bien (nº 97, etc.)

$$\sigma(A, B, C, D) = \sigma(C, D) \times \sigma(B, J) \times \sigma(A, I) = \frac{\sin\overline{CD}}{\sin\overline{\gamma D}} \times \frac{\sin\overline{BJ}}{\sin\overline{\beta J}} \times \frac{\sin\overline{AI}}{\sin\overline{\alpha I}}.$$

Or, dans la correspondance par polaires réciproques dont S est la quadrique double, on a (nº 128, etc.) pour le dernier rapport

$$\frac{\sin\overline{AI}}{\sin\overline{\alpha I}} = \frac{\sin\overline{AI}\sin(AI, BCD)}{\sin\overline{\alpha I}\sin(\alpha I, BCD)} = \frac{\sin\overline{AI'}}{\sin\overline{\alpha I''}},$$

parce que AI' et αI'' passent en α'; et une relation analogue pour

le second rapport; on en conclut

$$\sigma(A, B, C, D) = \frac{\sin\overline{CD}\sin\overline{BJ'}\sin\overline{AI'}}{\sin\overline{\gamma D}\sin\overline{\beta J''}\sin\overline{\alpha I''}};$$

comme le numérateur du second membre est la fonction ponctuelle s du tétraèdre relative à la correspondance par polaires réciproques dont S est la quadrique double, on a

$$\sin\varphi = \sin\overline{\gamma D}\sin\overline{\beta J''}\sin\overline{\alpha I''}$$

ou bien, puisque γ et D sont conjugués, ainsi que β et J'', α et I'',

$$\sin\varphi = \sin\theta''\sin\theta'\sin\theta,$$

en désignant par θ'' le paramètre du rayon CD, par θ' le paramètre du rayon $\beta\beta'$, par θ le paramètre du rayon $\alpha\alpha'$. On peut présenter le calcul en prenant $\frac{\sigma(ABCD)}{s(ABCD)}$; on a alors

$$\frac{\sigma(AI)}{\sin\overline{AI'}} = \frac{1}{\sin\theta},$$

et ainsi de suite.

Si le tétraèdre ABCD est $\alpha\beta\gamma D$, dans lequel α dépend de 3 paramètres, β dépend de deux paramètres, et γ dépend d'un paramètre, on a d'abord

$$\sigma^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma(\beta\alpha) & 1 & 0 & 0 \\ \gamma(\gamma\alpha) & \gamma(\gamma\beta) & 1 & 0 \\ \gamma(D\alpha) & \gamma(D\beta) & \gamma(D\gamma) & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

d'où il résulte immédiatement que $\sin\varphi$ est la fonction ponctuelle du tétraèdre $\alpha\beta\gamma D$ relative à la quadrique S; on retrouve ainsi la formule donnée plus haut.

Cette formule montre que le rapport étudié ici restera le même si l'on change le point A; on en conclut qu'il est le même pour deux tétraèdres quelconques.

On aurait pu adopter pour cette démonstration la méthode de proche en proche, en passant du paramètre ponctuel d'un rayon au paramètre ponctuel d'un plan, et de celui-ci au paramètre ponctuel de l'espace.]



CHAPITRE VI.

INTERSECTIONS, ETC.

§ I.

91. Intersection de deux éléments; question corrélative. — Soient deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$, $p \leqq \pi$, $\varkappa \leqq q$; le plus petit des quatre indices est p ou $\varkappa$, et nous aurons trois cas :

1° Les deux éléments sont associables, $p + \pi = n$, $\varkappa + q = n$: ils n'ont en général ni point commun, ni trope commun;

2° On a $p + \pi < n$, et soit $p + \pi = n - \omega$: les deux éléments ont un élément $M_{p+\pi}^\omega$ circonscrit commun, et n'ont pas de point commun;

3° On a $\varkappa + q < n$, et soit $\varkappa + q = n - \omega$: les deux éléments ont un élément $M_\omega^{\varkappa+q}$ inscrit commun, et n'ont pas de trope circonscrit commun.

On peut dire que deux éléments forment un système de *première espèce* lorsque le nombre des points nécessaires pour les définir est inférieur ou égal à n : $p + \pi \leqq n$; ils n'ont pas de point commun et sont en général dans un élément $M_{p+\pi}$. Deux éléments forment un système de *seconde espèce* lorsque le nombre des tropes nécessaires pour les définir est inférieur ou égal à n : $\varkappa + q \leqq n$; ils n'ont pas de trope circonscrit commun et passent par un élément $M^{\varkappa+q}$. Deux éléments associables sont à la fois de première et de seconde espèce.

92. Élément d'espèce donnée inscrit ou circonscrit à deux éléments : nombre de conditions. — On a trois cas :

1° Deux éléments associables qui ont un M_{p-P} inscrit commun ont un M^{p-P} circonscrit commun;

2° Si les deux éléments $M_p M^\varkappa$, $p < \varkappa$ ont un M_{p-P} inscrit commun, $p \gtreqqless P \gtreqqless 0$, ils ont un $M^{\varkappa-P}$ circonscrit commun;

3° Si les deux éléments $M_p M^\varkappa$, $\varkappa < p$, ont un $M^{\varkappa-P}$ circonscrit commun, $\varkappa \gtreqqless P \gtreqqless 0$, ils ont un M_{p-P} inscrit commun.

On peut former le Tableau

$$M_0 \qquad \underline{\overline{M_{p-P} \quad M_p} \qquad \overline{M^\varkappa \quad M^{\varkappa-P}}} \qquad M^0;$$

dans le premier cas, les deux intervalles extrêmes sont égaux, etc.

On peut donner cette classification :

	$P \neq 0$.	$P = 0$.
$P < p - 1$. $P < \varkappa - 1$.	M_{p-P} inscrit commun. $M^{\varkappa-P}$ circonscrit commun (n° 120).	M_p^q dans $M_\pi^\varkappa$. (En particulier M_p^q identique à $M_\pi^\varkappa$.)
$P = p - 1 < \varkappa$. $P = \varkappa - 1 < p$.	Point commun (n° 120). Trope commun (n° 120).	Point d'un élément (n° 47). Trope d'un élément (n° 47).
$P = p - 1 = \varkappa - 1$.	Association de M_p^q et M_q^p (n° 57).	Association d'un point et d'un trope (n° 13).
$P = p$ ou $\varkappa$.	Deux éléments dans la position générale.	

Le nombre des positions relatives que peuvent occuper deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$, au point de vue des points et des tropes qu'ils peuvent avoir en commun, est le plus petit des quatre indices augmenté de 1, c'est-à-dire $p + 1$ ou $\varkappa + 1$.

93. L'ordre des deux éléments étant $M_p^q M_\pi^\varkappa$, on a rattaché l'élément inscrit commun à M_p^q en l'écrivant M_{p-P}, et l'élément circonscrit commun à $M_\pi^\varkappa$ en l'écrivant $M^{\varkappa-P}$. Si l'on fait le contraire, on désignera l'élément inscrit par $M_{\pi-Q}$, l'élément circonscrit par M^{q-Q}; on aura d'ailleurs

$$Q - P = \pi - p = q - \varkappa = \delta,$$

le nombre δ étant déterminé par l'intervalle qui sépare les deux éléments donnés dans le Tableau du n° 92, et les conditions $\genfrac{}{}{0pt}{}{p}{\varkappa} \gtreqqless P \gtreqqless 0$ donneront

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\pi}{q} \gtreqqless Q \gtreqqless \delta.$$

94. Si l'on appelle M_ρ et M^σ l'élément inscrit commun et l'élément circonscrit commun, on a

$$p - P = \pi - Q = \rho, \qquad \varkappa - P = q - Q = \sigma,$$

et les deux éléments donnés seront $M^{\sigma+Q}_{\rho+P}$ et $M^{\sigma+P}_{\rho+Q}$; on a le Tableau

$$M_\rho \quad M^{\sigma+Q}_{\rho+P} \qquad M^{\sigma+P}_{\rho+Q} \quad M^\sigma.$$

Cette notation est bonne lorsque ρ et σ sont donnés. Par exemple, le nombre des conditions nécessaires pour l'existence des éléments M_ρ et M^σ est $\rho\sigma$.

95. Conditions. — Soient deux éléments $M^q_p\, M^\varkappa_\pi$ qui ont un élément M_ρ inscrit commun : si l'on considère un élément M_{P+1} inscrit à M^q_p, cet élément et l'élément M_ρ ont un élément $M_{\rho+P}$ circonscrit commun, et ont par suite un point M_1 commun; ce point étant dans M_ρ se trouve dans $M^\varkappa_\pi$ et appartient par suite à tout élément M^{P+1} circonscrit à $M^\varkappa_\pi$: il en résulte que tout élément M_{P+1} inscrit à M^q_p et tout élément M^{P+1} circonscrit à $M^\varkappa_\pi$ sont associés; ou encore, un élément M_{P+1} défini par $P+1$ points de M^q_p et un élément M^{P+1} défini par $P+1$ tropes de $M^\varkappa_\pi$ sont associés. Alors, dans la matrice à laquelle donnent lieu les Δ des points M qui définissent M^q_p et des tropes μ qui définissent $M^\varkappa_\pi$, tous les déterminants d'ordre $P+1$ sont nuls.

De même, dans la matrice à laquelle donnent lieu les Δ des points $\mathfrak{M}$ qui définissent $M^\varkappa_\pi$ et des tropes m qui définissent M^q_p, tous les déterminants d'ordre $Q+1$ sont nuls.

On trouvera au n° 120 les relations entre les coordonnées de deux éléments $M^q_p\, M^\varkappa_\pi$ qui ont M_ρ inscrit commun.

§ II.

96. Conjugaisons. — Étant donnés deux éléments $M^q_p\, M^\varkappa_\pi$, sans supposer ici $p < \pi$, si l'on considère la suite $L^\pi_\varkappa\, M^q_p\, M^\varkappa_\pi\, N^p_q$, on pourrait étudier la position des deux premiers éléments ou celle des deux derniers qui sont leurs transformés; on aurait à considérer également les deux éléments dans l'ordre inverse, avec la suite $L^p_q\, M^\varkappa_\pi\, M^q_p\, N^\pi_\varkappa$. En résumé, on aurait à étudier la position de l'un

des éléments donnés par rapport au primitif ou au transformé de l'autre. Je ne ferai que signaler cette étude.

J'ajouterai seulement ceci : pour deux éléments formant un système de seconde espèce, $q + \varkappa \leqq n$, dans la suite $L_{\varkappa}^{\pi} M_{p}^{q} M_{\pi}^{\varkappa} N_{q}^{p}$ le premier élément peut être inscrit au second, auquel cas le quatrième élément est inscrit au troisième; nous dirons alors que M_{p}^{q} et $M_{\pi}^{\varkappa}$ sont *pleinement conjugués* de seconde espèce; le Γ de deux tropes m et μ appartenant aux deux éléments est nul. De même, etc.

CHAPITRE VII.

ÉQUATION AUX Δ^2 PRINCIPAUX.

On considère, dans ce Chapitre, deux éléments quelconques $M_p^q M_\pi^\varkappa$; deux points seront M et $\mathcal{M}$, deux tropes seront m et μ, un point et un trope seront M et μ.

§ I.

97. **Le Δ d'un point et d'un trope.** — Soient un point M et un trope μ dirigés :

1° Considérons la suite $\underline{l\mu M}\,\mathcal{N}$ dans laquelle l et $\mathcal{N}$ sont dirigés, et où μ est avant M : le rayon $M\mathcal{N}$ ou R rencontre le trope μ en un point $\mathcal{M}$ que nous dirigerons à volonté, et l'on a, comme au n° 76, trois points $\mathcal{M} M \mathcal{N}$ dont les deux extrêmes sont conjugués; si l'on dirige R d'après $\mathcal{M}$ de façon qu'on ait $\sigma(\mathcal{M}\mathcal{N}) = 1$ ou $(\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}) = \theta$, le point M affecté du coefficient 1 est le résultant des points $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ affectés des coefficients $\sigma(\mathcal{M}M)$ et $\sigma(M\mathcal{N})$; en prenant les Δ par rapport au trope μ, on a

$$\Delta(\mu M) = \sigma(\mathcal{M}M) \qquad \text{avec} \qquad \sigma(\mathcal{M}\mathcal{N}) = 1;$$

la condition est facile à retenir en se rappelant qu'on doit avoir $\Delta(\mu\mathcal{N}) = 1$.

D'autre part, l'axe $l\mu$ ou A détermine avec M un trope m que nous dirigerons à volonté; on a les trois tropes $l\mu m$, et si l'on dirige l'axe A d'après m de façon qu'on ait $\Sigma(lm) = 1$ ou $(lm) = \Theta$, on obtient

$$\Delta(\mu M) = \Sigma(\mu m) \qquad \text{avec} \qquad \Sigma(lm) = 1.$$

2° En considérant la suite $\mathcal{L}\underline{M\mu}\,n$ où M est avant μ, le rayon $\mathcal{L}M$ ou $R^\star$ rencontre μ en un point $\mathcal{M}^\star$, l'axe μn ou $A^\star$ détermine avec

M un trope $m^\star$, et l'on a

$$\Delta(M\mu) = \sigma(M\mathfrak{M}^\star) \quad \text{avec} \quad \sigma(\mathfrak{L}\mathfrak{M}^\star) = 1,$$
$$\Delta(M\mu) = \Sigma(m^\star\mu) \quad \text{avec} \quad \Sigma(m^\star n) = 1.$$

Quand M est sur $\mathfrak{L}\mathfrak{N}$, le point $\mathfrak{M}^\star$ est le point $\mathfrak{M}$, et nous le dirigerons de la même façon. Si $n-1$ est pair, on doit avoir $\sigma(\mathfrak{M}M) = \sigma^\star(M\mathfrak{M})$, $R^\star$ est donc R dirigé en sens inverse; en même temps, si la corrélation est une correspondance par polaires réciproques, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{N}$ sont un même point dirigé de la même façon, et l'on a $\sigma^\star(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M}\mathfrak{N})$. Si $n-1$ est impair, $R^\star$ est identique à R; en même temps, pour une correspondance par polaires réciproques, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{N}$ sont un même point dirigé de deux façons différentes, etc.

Il est bon de remarquer qu'on a $\Delta^2(m\mathfrak{M}) = \Delta^2(\mu M)$; en effet, les trois tropes $l\mu m$ passant par un même axe, leurs points transformés $M\mathfrak{N}N$ sont sur un même rayon R, etc. Si l'on voulait donner le signe, il faudrait donner le sens de m et de $\mathfrak{M}$; on pourrait, par exemple, diriger $\mathfrak{M}$ d'après m de façon que le rayon dirigé R fût le transformé de l'axe A.

98. Inversement, en laissant ici les signes de côté, on peut considérer la fonction ponctuelle de deux points $\sigma(M\mathfrak{M})$ comme le Δ de l'un des points et du trope qui passe par l'autre et par l'axe primitif du rayon $M\mathfrak{M}$ (ou par l'axe transformé); de même, on peut considérer la fonction tangentielle de deux tropes comme un Δ. On peut remarquer que le σ de deux points M et $\mathfrak{M}$ est égal au Σ des deux tropes m et μ qui passent par ces points et par l'axe primitif du rayon $M\mathfrak{M}$; ce fait est facile à comprendre : en effet, si nous menons par l'axe les deux tropes $\omega\omega'$ tangents à l'équationnelle double s, leurs points transformés sont les points $\Omega\Omega'$ où le rayon perce l'équationnelle S, et ces points sont ceux où les deux tropes $\omega\omega'$ rencontrent le rayon; on comprend alors que le rapport anharmonique des quatre tropes $m\mu\omega\omega'$ passant par l'axe doit être égal à celui des quatre points $M\mathfrak{M}\Omega\Omega'$ où ces tropes coupent le rayon, c'est-à-dire que le pseudo-angle des tropes m et μ doit être égal à la pseudo-distance des points M et $\mathfrak{M}$; le paramètre de l'axe ou le pseudo-angle (lm) est alors égal au paramètre du rayon qui est la pseudo-distance des deux

points du rayon entre l et m ; et, finalement, le Σ des deux tropes m et μ est égal au σ des deux points M et $\mathfrak{M}$.

Observons encore que le σ de deux points peut être considéré à deux points de vue différents : on peut le considérer comme un Δ, et, à ce point de vue, les deux points sont comparables aux deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ que nous étudierons dans ce Chapitre ; on peut aussi le considérer comme une fonction ponctuelle, et alors les deux points sont un cas particulier d'un système de p points.

On comprend bien comment le γ de deux points est un Δ (par définition même) ; on a, par exemple (nos 76 et 97, 2°),

$$\gamma(M\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M}N) = \Delta(\mathfrak{M}n) \qquad \text{avec} \qquad \sigma(MN) = 1.$$

99. **Extension de l'idée de perpendiculaire commune.** — On fera d'abord la figure schématique suivante, où les éléments M_p^q sont représentés par des droites : sur la droite de la figure et en haut une droite M_2, sur la gauche en bas une droite M^2, celle-ci en trait gras parce qu'elle représente un axe ; une droite M_p^q et une droite $M_\pi^\varkappa$ (celle-ci au-dessous) rencontrent M_2 en M et $\mathfrak{M}$, et déterminent avec M^2 deux plans m et μ que l'on indique par un arc comme on indique un angle ; au-dessus de M_p^q vers la droite deux droites $N_\varkappa^\pi N_q^p$ rencontrent M_2 en $\mathfrak{N}$ et N, et au-dessous de $M_\pi^\varkappa$ vers la gauche deux droites L_q^p et $L_\varkappa^\pi$ déterminent avec M^2 deux plans l et λ ; enfin, à gauche de $M_2^\star$, une droite M_2 en pointillé rencontre $M_p^q M_\pi^\varkappa L_q^p L_\varkappa^\pi$ en $M^\star \mathfrak{M}^\star L^\star \mathfrak{L}^\star$, et à droite de M_2 une droite $M_\star^2$ en pointillé gras détermine avec $M_\pi^\varkappa M_p^q N_\varkappa^\pi N_q^p$ des plans $\mu_\star m_\star \nu_\star n_\star$. Les plans représentent des tropes. L'axe M^2 est le primitif du rayon M_2 ; l'autre axe est le transformé du rayon correspondant.

100. Considérons deux éléments quelconques $M_p^q M_\pi^\varkappa$ avec l'hypothèse permise $p < \pi$, $\varkappa < q$: les points et les tropes du premier seront désignés par M et m, les points et les tropes du second par $\mathfrak{M}$ et μ. Soient N_q^p l'élément transformé de M_p^q et $N_\varkappa^\pi$ l'élément transformé de $M_\pi^\varkappa$; les points de ces deux éléments seront désignés respectivement par N et $\mathfrak{N}$, le point N étant transformé du trope m, etc. Il est facile de voir qu'un rayon M_2, assujetti à avoir un point commun avec chacun des quatre éléments considérés ici, est déterminé. Nous désignerons par $M\mathfrak{M}N\mathfrak{N}$ les

points en lesquels un de ces rayons rencontre les quatre éléments. Au lieu des éléments transformés $N_q^p N_\varkappa^\pi$, on peut d'ailleurs considérer les éléments primitifs L_q^p, $L_\varkappa^\pi$; un rayon $M_2^\star$ peut rencontrer les deux éléments donnés et leurs éléments primitifs en des points que nous appellerons $M^\star \mathcal{M}^\star L^\star \mathcal{L}^\star$.

De même un axe M^2, assujetti à avoir un trope commun avec chacun des quatre éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa L_q^p L_\varkappa^\pi$, est déterminé; et d'ailleurs, à chacun des rayons M_2 obtenus précédemment correspond un axe M^2 qui est l'axe primitif du rayon; nous désignerons par $m \mu l \lambda$ les tropes communs à un de ces axes et à chacun des éléments considérés, en observant que ces tropes sont les tropes primitifs des points $N \mathcal{N} M \mathcal{M}$ considérés ci-dessus. Au lieu des éléments primitifs $L_q^p L_\varkappa^\pi$, on peut d'ailleurs considérer les éléments transformés; un axe $M_\star^2$ peut avoir un trope commun avec chacun des éléments donnés ou transformés, et nous désignerons ces tropes par $m^\star \mu^\star n^\star \nu^\star$.

101. Le nombre des rayons M_2 ou des axes M^2 est le plus petit des quatre indices p, q, π, $\varkappa$, c'est-à-dire p ou $\varkappa$, d'après l'hypothèse faite au début. Ce fait résultera du degré de l'équation aux Δ^2 principaux; on pourrait s'en rendre compte à l'aide de considérations analogues aux considérations d'homographie qui démontrent dans l'espace réel l'existence de deux droites rencontrant quatre droites; l'idée essentielle est que, par un point, on peut mener un seul rayon rencontrant deux éléments associables, et le cas le plus simple est celui de deux éléments de même espèce ou de deux éléments associables. On verra comment le degré de l'équation aux Δ^2 principaux est en harmonie avec le nombre des positions relatives que peuvent occuper les deux éléments.

Nous ferons observer que, à chaque rayon M_2 doit correspondre un axe $M_\star^2$ de telle façon que l'on ait $\sigma(M\mathcal{M}) = \Sigma(m^\star \mu^\star)$; ou encore, à chaque rayon M_2 doit correspondre un rayon $M_2^\star$; je n'ai pas élucidé cette question.

102. Équation aux Δ^2 principaux. — Étant donnés les deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$, considérons les rayons M_2 qui rencontrent ces deux éléments et leurs transformés, et les axes primitifs M^2 qui ont un trope commun avec ces deux éléments et leurs primitifs,

et conservons les notations précédentes : nous désignerons sous le nom de Δ *principaux* les Δ des points M et des tropes μ correspondants; ce sont aussi, en laissant les signes de côté, les Δ des points $\mathfrak{M}$ et des tropes m; ce sont enfin les σ des couples de points M et $\mathfrak{M}$, et les Σ des couples de tropes m et μ. Le nombre de ces Δ principaux est le plus petit des quatre indices p, q, π, $\varkappa$, c'est-à-dire le plus petit des deux indices p et $\varkappa$; nous allons chercher l'équation au carré des Δ principaux.

Définissons le premier élément par des points $M_{,} M_{,,} \ldots M_{(p)}$, et le second par des tropes $\mu' \mu'' \ldots$; soient M un point du premier élément, μ un trope du second : le point M affecté du coefficient 1 peut être regardé comme le point résultant des points $M_{,} M_{,,} \ldots$ affectés des coefficients $k_{,} k_{,,} \ldots$; le trope μ, affecté du coefficient 1, peut être regardé comme le trope résultant des tropes $\mu' \mu'' \ldots$ affectés des coefficients $k' k'' \ldots$. Pour obtenir un rayon M_2, nous prendrons les points M et $\mathfrak{N}$ sur $M_q^p N_\varkappa^\pi$, et nous écrirons l'existence des points de rencontre $\mathfrak{M}$ et N; pour cela nous écrirons directement l'existence du point $\mathfrak{M}$, et nous écrirons comme il suit l'existence du point N : considérant l'axe M^2 primitif du rayon M_2 et les tropes l et μ primitifs des points M et $\mathfrak{N}$, nous écrirons que l'axe $l\mu$ a, avec l'élément M_p^q, un trope commun m dont l'existence entraîne celle du point N.

1° Écrivons que le rayon $M\mathfrak{N}$ rencontre $M_\pi^\varkappa$ en un point $\mathfrak{M}$. En considérant les trois points $M\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ on voit que le point $\mathfrak{M}$ est le point résultant du point $\mathfrak{N}$ affecté du coefficient $\sigma(M\mathfrak{M})$ ou $-\Delta(\mu M)$ en prenant $\sigma(\mathfrak{M}\mathfrak{N}) = 1$ et du point M affecté du coefficient 1; si l'on écrit que ce point $\mathfrak{M}$ est dans chacun des tropes $\mu' \mu'' \ldots$ on obtient des relations dont le type est

$$\Delta(M\mu') = \Delta(M\mu)\,\Delta(\mu'\mathfrak{N}) \qquad \text{ou} \qquad \Delta(M\mu') = \Delta(M\mu)\,\Gamma(\mu\mu'),$$

ou enfin

$$k_{,}\Delta(M_{,}\mu') + k_{,,}\Delta(M_{,,}\mu') + \ldots = \Delta(M\mu)\,[k' + k''\Gamma(\mu''\mu') + \ldots].$$

2° Écrivons de même que l'axe $l\mu$ a un trope commun m avec l'élément M_p^q. Si l'on considère les trois tropes $lm\mu$, on voit que le trope m est le trope résultant de μ et l affectés des coefficients 1 et $\Sigma(m\mu)$ ou $-\Delta(\mu M)$ en prenant $\Sigma(lm) = 1$; en écrivant qu'il passe par les points $M_{,} M_{,,} \ldots$ on obtient des relations dont le



type est

$$\Delta(\mu M_{\prime}) = \Delta(\mu M)\,\Delta(l M_{\prime}) \qquad \text{ou} \qquad \Delta(M_{\prime}\mu) = \Delta(M\mu)\,\gamma(M_{\prime}M),$$

ou enfin

$$k'\Delta(M_{\prime}\mu') + k''\Delta(M_{\prime}\mu'') + \ldots = \Delta(M\mu)\,[k_{\prime} + k_{\prime\prime}\gamma(M_{\prime}M_{\prime\prime}) + \ldots].$$

L'élimination des coefficients k entre ces deux séries de relations donne l'équation cherchée, en posant pour abréger $\Delta = \Delta(M\mu)$:

$$\begin{bmatrix} \Delta.\gamma(M_{\prime}M_{\prime}) & \Delta(M_{\prime}\mu') \\ \Delta(M_{\prime}\mu') & \Delta.\Gamma(\mu'\mu') \end{bmatrix} = 0;$$

le premier membre est un déterminant d'ordre $p + \varkappa$ ou $n - \delta$, dont les p premières rangées se rapportent aux éléments $M_{\prime}$ ... occupant le premier rang, les $\varkappa$ dernières rangées se rapportent aux éléments μ' ... occupant le second rang, les p premières colonnes se rapportent à $M_{\prime}$ ..., les $\varkappa$ dernières colonnes se rapportent à μ' ....

L'équation écrite sous cette forme est du degré $p + \varkappa$; mais elle a $\varkappa - p$ ou $p - \varkappa$ racines nulles selon que le plus petit des quatre indices est p ou $\varkappa$, en sorte qu'elle est du degré $2p$ ou du degré $2\varkappa$. Dans le premier cas, si l'on divise les $\varkappa$ dernières colonnes par Δ, et qu'on multiplie ensuite les p premières rangées par Δ, ce qui supprime précisément les $\varkappa - p$ racines nulles, l'équation prend la forme

$$\begin{bmatrix} \Delta^2\gamma(M_{\prime}M_{\prime}) & \Delta(M_{\prime}\mu') \\ \Delta(M_{\prime}\mu') & \Gamma(\mu'\mu') \end{bmatrix} = 0$$

et c'est une équation en Δ^2 du degré p; le terme indépendant, obtenu en faisant $\Delta^2 = 0$, n'est pas nul, parce que le nombre des colonnes restantes dans les p premières rangées est supérieur ou au moins égal au nombre des rangées. Dans le second cas, on obtient une équation analogue du degré $\varkappa$, les Δ^2 portant sur les quantités Γ; mais on peut aussi garder la forme ci-dessus, en observant seulement que l'équation a alors $p - \varkappa$ racines nulles et en convenant de décrire le premier membre par $(\Delta^2)^{p-\varkappa}$. On a ainsi l'équation aux carrés des Δ principaux, et l'on voit que son degré est le plus petit des quatre indices $p, q, \pi, \varkappa$.

103. On a supposé l'élément M_q^p le plus rapproché de M_0 défini par des points, l'élément $M_\pi^\varkappa$ défini par des tropes, et l'on a pris $\Delta(M\mu)$: c'est ce que l'on peut faire de mieux. Toutefois, on peut définir l'élément $M_\pi^\varkappa$ par des points, l'élément M_p^q par des tropes, et prendre $\Delta(\mathfrak{M}m)$; l'équation aux Δ principaux se présente alors sous une seconde forme, le premier membre étant un déterminant d'ordre $\pi + q$ ou $n + \delta$: c'est une équation du degré $\pi + q$, ayant $q - \pi$ ou $\pi - q$ racines nulles, c'est-à-dire le même nombre de racines nulles que précédemment, et l'équation aux carrés des Δ principaux se présente avec le degré π ou q; mais, en posant $\pi - p = q - \varkappa = \delta$, cette équation a δ racines égales à 1, et le nombre des Δ principaux véritables est p ou $\varkappa$; c'est ce que nous allons montrer.

L'équation en question est (sans racines nulles pour $\pi < q$ ou $p < \varkappa$]

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 \gamma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1) & \Delta(\mathfrak{M}, m') \\ \Delta(\mathfrak{M}, m') & \Gamma(m' m') \end{bmatrix} = 0$$

Si l'on remplace Δ^2 par $1 - (1 - \Delta^2)$, en considérant $1 - \Delta^2$ comme l'inconnue, il faut montrer que cette inconnue a δ valeurs nulles; or, pour former un terme en $(1 - \Delta^2)^{\delta - i}$, i prenant les valeurs $\delta, \ldots, 1$, on prend $(1 - \Delta^2)\gamma(\mathfrak{M}\mathfrak{M})$ dans $\delta - i$ termes et le multiplicateur est un déterminant d'ordre $n + i$ qui est un mineur du déterminant ci-dessus pour $\Delta = 1$: je dis que tous ces déterminants sont nuls; on va voir, en effet, que le déterminant ci-dessus, quand on y fait $\Delta = 1$, a tous ses mineurs d'ordre $n + i$ égaux à 0. Les relations qui conduisent à l'équation aux Δ^2 sous sa forme actuelle sont

$$\frac{\Delta(\mathfrak{M}, m)}{\gamma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})} = \ldots = \Delta$$
$$\frac{\Delta(\mathfrak{M}\, m')}{\Gamma(m m')} = \ldots = \Delta;$$

elles sont toutes vérifiées en supposant que le point $\mathfrak{M}$ est en même temps un point N transformé de m, et faisant $\Delta = 1$; or, les éléments $M_\pi^\varkappa$ et M_q^p ont un élément M_δ inscrit commun, et les points de cet élément qui dépendent de $\delta - 1$ paramètres sont des points $\mathfrak{M}$ et en même temps des points N : si l'on considère alors m comme le résultant des tropes $m' m'' \ldots$, $\mathfrak{M}$ comme le résultant



des tropes $\mathfrak{M}_{,}\mathfrak{M}_{,,}\ldots$, les relations ci-dessus dans lesquelles on fait $\Delta = 1$ donnent $\pi + q$ ou $n + \delta$ équations homogènes par rapport aux coefficients k, lesquelles doivent se réduire à n; donc, le déterminant ci-dessus, quand on y fait $\Delta = 1$, a tous ses mineurs d'ordre $n + i$ égaux à o.

104. On a pris les rayons qui rencontrent les deux éléments donnés et leurs transformés, les axes qui ont un trope commun avec les éléments et leurs primitifs; on peut prendre les rayons qui rencontrent les deux éléments donnés et leurs primitifs, etc.

105. Équation aux valeurs du produit $\gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M})\gamma(\mathfrak{M}\mathrm{M})$ ou $1-\Delta^2$. — On peut définir les deux éléments $\mathrm{M}_p^q\,\mathrm{M}_\pi^\varkappa$ par des points $\mathrm{M}_{,}\mathrm{M}_{,,}\ldots\mathrm{M}_p$, $\mathfrak{M}_{,}\mathfrak{M}_{,,}\ldots\mathfrak{M}_\pi$; mais alors on forme une équation aux valeurs du produit $\gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M})\gamma(\mathfrak{M}\mathrm{M})$ ou $1-\Delta^2$, M et $\mathfrak{M}$ étant les points d'appui sur les deux éléments donnés d'un rayon qui les rencontre ainsi que leurs transformés.

Les points M et $\mathfrak{M}$ étant pris sur les éléments donnés, écrivons que le rayon $\mathrm{M}\mathfrak{M}$ rencontre les éléments transformés. Le point N considéré comme résultant de M et $\mathfrak{M}$ doit être conjugué des points $\mathrm{M}_{,}\,\mathrm{M}_{,,}\ldots$; de même le point $\mathfrak{N}$ doit être conjugué des points $\mathfrak{M}_{,}\,\mathfrak{M}_{,,}\ldots$; on doit donc avoir, en considérant les deux systèmes de trois points $\mathrm{MN}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathrm{M}$, et les points $\mathrm{M}_{,}$ et $\mathfrak{M}_{,}$ par exemple

$$\sigma(\mathrm{N}\mathfrak{M})\gamma(\mathrm{M}_{,}\mathrm{M}) + \sigma(\mathrm{MN})\gamma(\mathrm{M}_{,}\mathfrak{M}) = 0,$$
$$\sigma(\mathfrak{N}\mathrm{M})\gamma(\mathfrak{M}_{,}\mathfrak{M}) + \sigma(\mathfrak{M}\mathfrak{N})\gamma(\mathfrak{M}_{,}\mathrm{M}) = 0,$$

ou bien

$$\gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M})\gamma(\mathrm{M}_{,}\mathrm{M}) = \gamma(\mathrm{M}_{,}\mathfrak{M}),$$
$$\gamma(\mathfrak{M}\mathrm{M})\gamma(\mathfrak{M}_{,}\mathfrak{M}) = \gamma(\mathfrak{M}_{,}\mathrm{M});$$

donc enfin, en considérant le point M affecté du coefficient 1 comme le point résultant des points $\mathrm{M}_{,}\mathrm{M}_{,,}\ldots$ affectés des coefficients $k_{,}k_{,,}\ldots$, et le point $\mathfrak{M}$ comme le point résultant des points $\mathfrak{M}_{,}\mathfrak{M}_{,,}\ldots$ affectés des coefficients $\mathrm{K}_{,}\mathrm{K}_{,,}\ldots$, on a

$$\gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M})[k_{,} + k_{,,}\gamma(\mathrm{M}_{,}\mathrm{M}_{,,}) + \ldots] = \mathrm{K}_{,}\gamma(\mathrm{M}_{,}\mathfrak{M}_{,}) + \mathrm{K}''\gamma(\mathrm{M}_{,}\mathfrak{M}_{,,}) + \ldots$$
$$\gamma(\mathfrak{M}\mathrm{M})[\mathrm{K}_{,} + \mathrm{K}_{,,}\gamma(\mathfrak{M}_{,}\mathfrak{M}_{,,}) + \ldots] = k_{,}\gamma(\mathfrak{M}_{,}\mathrm{M}_{,}) + k_{,,}\gamma(\mathfrak{M}_{,}\mathrm{M}_{,,}) + \ldots;$$

l'élimination des coefficients k et des coefficients K entre les deux séries de relations ainsi obtenues donne la relation suivante, dans

laquelle on a posé pour abréger $\gamma = \gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M})$ et $\gamma' = \gamma(\mathfrak{M}\mathrm{M})$:

$$\begin{bmatrix} \gamma.\gamma(\mathrm{M},\mathrm{M}_,) & \gamma(\mathrm{M},\mathfrak{M}_,) \\ \gamma(\mathfrak{M},\mathrm{M}_,) & \gamma'.\gamma(\mathfrak{M},\mathfrak{M}_,) \end{bmatrix} = 0 ;$$

le premier membre est un déterminant d'ordre $p + \pi$.

Cette relation est du degré p en γ, du degré π en γ', mais le premier membre est divisible par γ'^{δ}; si l'on divise les π dernières colonnes par γ', et qu'on multiplie ensuite les p premières rangées par γ' (ce qui supprime le facteur γ'^{δ}), en remplaçant $\gamma\gamma'$ par $1 - \Delta^2$, on obtient l'équation

$$\begin{bmatrix} (1-\Delta^2)\gamma(\mathrm{M},\mathrm{M}_,) & \gamma(\mathrm{M},\mathfrak{M}_,) \\ \gamma(\mathfrak{M},\mathrm{M}_,) & \gamma(\mathfrak{M},\mathfrak{M}_,) \end{bmatrix} = 0 ;$$

cette équation donne les valeurs de la quantité $1 - \Delta^2$; on peut encore la considérer comme étant, sous une nouvelle forme, l'équation aux Δ^2 principaux, et elle est du degré p. Si l'on fait porter les $1 - \Delta^2$ sur les termes $\gamma(\mathfrak{M}\mathfrak{M})$, on a une équation du degré π en $1 - \Delta^2$ avec δ racines nulles, ou du degré π en Δ^2 avec δ racines égales à 1. Remarquons encore que, dans le cas $p + \pi < n$, l'ordre $p + \pi$ du déterminant étant inférieur à n, l'équation aux $1 - \Delta^2$ n'a pas de racine étrangère égale à 1, et l'équation aux Δ^2 n'a pas de racine nulle étrangère; mais, dans l'hypothèse $p + \pi = n + \omega$, auquel cas l'ordre $p + \pi$ du déterminant est supérieur à n, l'équation aux $1 - \Delta^2$ renferme ω racines parasites égales à 1, et l'équation aux Δ^2 a le même nombre de racines nulles étrangères.

Au lieu de définir les deux éléments par des points, on peut les définir par des tropes; on a alors un déterminant d'ordre $\varkappa + q$, et l'équation aux $1 - \Delta^2$ se présente avec le degré $\varkappa$; si l'on a $\varkappa + q < n$, cette équation n'a pas de racine étrangère égale à 1, ou encore l'équation aux Δ^2 n'a pas de racine nulle étrangère.

106. **Racines nulles dans l'équation aux Δ^2 principaux.** — On a vu, au n° 92, que le nombre des positions relatives des deux éléments $\mathrm{M}_p^q \mathrm{M}_\pi^\varkappa$ est le plus petit des quatre indices $p, q, \pi, \varkappa$ augmenté de 1, c'est-à-dire le plus petit des deux indices p et $\varkappa$ augmenté de 1; le degré de l'équation aux carrés des Δ principaux est lié à ce fait.

Supposons, par exemple, $p < \varkappa$, et prenons l'équation aux Δ^2 sous la forme du n° 102, qui est la meilleure; nous pourrons l'écrire, en considérant comme inconnue $-\Delta^2$ en raison de faits ultérieurs,

$$A_0(-\Delta^2)^p + \ldots + A_P(-\Delta^2)^{p-P} + A_{P+1}(-\Delta^2)^{p-(P+1)} + \ldots + A_p = 0,$$

et il est facile de s'assurer que, si les deux éléments considérés ont un élément inscrit commun M_{p-P}, l'équation aux Δ^2 a $p - P$ racines nulles, c'est-à-dire que l'on a

$$A_P \neq 0, \qquad A_{P+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad A_p = 0.$$

En effet, on peut développer l'équation aux Δ^2 en produits de mineurs d'ordre p formés avec les p premières rangées multipliés par les mineurs complémentaires d'ordre $\varkappa$ formés avec les $\varkappa$ dernières rangées; pour former un terme du degré $p - R$ ayant pour coefficient A_R, on prendra pour les p premières rangées $p - R$ colonnes parmi les premières et R colonnes parmi les dernières, et, par suite, pour les $\varkappa$ dernières rangées on prendra $\varkappa - R$ colonnes parmi les dernières et R colonnes parmi les premières; dès lors, pour que le coefficient A_{P+1} soit nul, ainsi que tous les coefficients suivants, il suffit que tous les déterminants d'ordre $P + 1$ soient nuls dans la matrice formée avec les quantités $\Delta(M_{,} \mu')$: et c'est bien ce qui a lieu comme on l'a vu au n° 95.

Pour $P = 0$, l'élément M_p^q est inscrit à l'élément $M_\pi^\varkappa$: l'équation aux Δ^2 a alors toutes ses racines nulles. Le coefficient A_0 est essentiellement différent de 0; c'est le produit du carré de la fonction ponctuelle des p points $M_{,}M_{,,}\ldots$ par le carré de la fonction tangentielle des $\varkappa$ tropes $\mu'\mu''\ldots$.

Si l'on prend l'équation aux Δ^2, sous la forme du n° 103, avec δ racines étrangères égales à 1,

$$\begin{aligned} &B_0(-\Delta^2)^\pi + \ldots + B_\delta(-\Delta^2)^{\pi-\delta} + \ldots \\ &\quad + B_Q(-\Delta^2)^{\pi-Q} + B_{Q+1}(-\Delta^2)^{\pi-(Q+1)} + \ldots + B_\pi = 0, \end{aligned}$$

on verra de même que, les deux éléments ayant un élément inscrit commun $M_{\pi-Q}$, cette équation a $\pi - Q$ racines nulles, c'est-à-dire que l'on a

$$B_Q \neq 0, \qquad B_{Q+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad B_\pi = 0;$$

on a, d'ailleurs, $Q \gtreqless \delta$.

107. Moment de deux éléments. — Nous appellerons *moment* de deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ le produit des Δ principaux relatifs à ces deux éléments; si l'on prend la première forme (n° 102) de l'équation aux Δ^2, on a, dans l'hypothèse $p < \varkappa$,

$$\text{Mom}^2 = (-1)^p \frac{\begin{bmatrix} 0 & \Delta(M_, \mu') \\ \Delta(M_, \mu') & \Gamma(\mu' \mu') \end{bmatrix}}{[\gamma(M_, M_,)][\Gamma(\mu' \mu')]},$$

et une formule analogue dans l'hypothèse contraire. On peut, d'ailleurs, calculer le carré du moment avec la seconde forme de l'équation aux Δ principaux donnée au n° 103, attendu que la présence de racines étrangères égales à 1 ne change pas le produit des racines. Et si l'on suppose que le premier élément est M_0^n défini par les n tropes de référence, le second $M_\pi^\varkappa$ étant défini par des points, on retrouve la formule du n° 38, en admettant que le carré du moment est égal à 1. Si l'on suppose que le second élément est M_n^0 défini par les n points de référence, etc.

108. Application aux fonctions ponctuelles, etc. — Soit $p + \pi \leqq n$ ou $p \leqq k$. Les deux éléments étant définis par des points, reprenons l'équation aux $1 - \Delta^2$; considérons l'équation aux Δ^2 sous la forme qui en résulte, et prenons le produit des Δ^2. Nous aurons

$$\text{Mom}^2 = \frac{\begin{bmatrix} \gamma(M_, M_,) & \gamma(M_, \mathfrak{M}_,) \\ \gamma(\mathfrak{M}_, M_,) & \gamma(\mathfrak{M}_, \mathfrak{M}_,) \end{bmatrix}}{[\gamma(M_, M_,)] \times [\gamma(\mathfrak{M}_, \mathfrak{M}_,)]}.$$

Nous avons donc ce théorème, qui concerne la Géométrie dans un élément $M_{p+\pi}$: la fonction ponctuelle d'un système de points dont le nombre $p + \pi$ ne surpasse pas n est égale au produit de la fonction ponctuelle de p de ces points et de la fonction ponctuelle des π autres points, multiplié par le moment des deux éléments que ces points déterminent respectivement; les éléments $M_p\, M_\pi\, M_{p+\pi}$ sont dirigés, et les fonctions ponctuelles ont des signes; le moment est celui des deux éléments dirigés $M_p\, M_\pi$ considérés dans l'élément dirigé $M_{p+\pi}$; l'ordre des points dans la fonction ponctuelle des $p + \pi$ points est celui-ci : on met d'abord les p points dans le même ordre que pour la fonction ponctuelle des p points, et ensuite les π points. Cette règle définit le signe du mo-

ment des deux éléments dans l'élément qui les contient; et il est facile de voir qu'elle ne diffère pas de la règle donnée au n° 9 du Chapitre I; il y aura seulement à faire voir, n° 116, que le signe du moment est indépendant des points considérés. Quand on change l'ordre de deux éléments, ce moment est multiplié par $(-1)^{p\pi}$, et, en effet, on le considère dans $M_{p+\pi}$. Le moment des deux éléments est nul lorsqu'ils ont un point commun, auquel cas les deux éléments sont dans un $M_{p+\pi-1}$; la fonction ponctuelle est nulle.

On aurait un théorème analogue (Géométrie autour de $M^{\varkappa+q}$) en considérant deux éléments définis par des tropes, avec l'hypothèse $\varkappa + q \leqq n$. Alors, quand on change l'ordre des deux éléments, le moment est multiplié par $(-1)^{q\varkappa}$, parce qu'on le considère autour de $M^{q+\varkappa}$.

On peut dire que deux éléments de première espèce, n° 91, ont un moment ponctuel (Géométrie dans un élément), que deux éléments de seconde espèce ont un moment tangentiel (Géométrie autour d'un élément).

109. **Moment d'un point et d'un élément, etc.** — Pour un point M_1 et un élément $M_\pi^\varkappa$, il n'y a qu'un Δ principal qui est le moment : on mène par ce point le rayon qui rencontre l'élément et son transformé. L'élément $M_\pi^\varkappa$ étant défini par des tropes, la valeur de Δ^2 est donnée par la formule du n° 102 qui renferme alors un seul Δ^2. Si l'élément $M_\pi^\varkappa$ est défini par des points, on a le théorème du numéro précédent avec un énoncé plus simple : la fonction ponctuelle d'un système de points, dont le nombre ne surpasse pas n, est égale à la fonction ponctuelle de ces points moins le premier, multipliée par le moment du premier point et de l'élément déterminé par les autres. Comme conséquence, prenons des points en nombre n que nous désignerons par A, B, C, D, ..., et soit (A, B, C, ...) la fonction ponctuelle d'un certain nombre de ces points; désignons par AB le rayon défini par les points A et B, par ABC l'élément M_3 défini par les points A, B, C, etc., et soit (AB, C) le moment de l'élément AB et du point C, etc.; on a successivement

$$(B, C, D) = (C, D)(B, CD),$$
$$(A, B, C, D) = (C, D)(B, CD)(A, BCD),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Pour un élément M_p^q et un trope M^1, il y a de même un seul Δ principal qui est le moment, etc.

110. Moment de deux éléments associables. — Pour deux éléments associables M_p^q et M_q^p, si l'un est défini par des points et l'autre par des tropes, on a

$$(M_p^q M_q^p) = \frac{[\Delta'_l]}{\sigma \Sigma}$$

et une formule semblable; on retrouve ainsi comme produit des Δ principaux la quantité appelée *moment* au Chapitre IV, et l'on a le théorème des déterminants de Δ, n° 51.

Le théorème général démontré plus haut donne la seconde propriété du moment indiquée au Chapitre IV; le moment entre à la fois dans l'expression de la fonction ponctuelle et dans l'expression de la fonction tangentielle d'un polytrope.

Lorsque le moment est nul, les deux éléments sont associés.

111. Cas où le moment de deux éléments est nul. — On peut se demander quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le moment de deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ soit égal à o, c'est-à-dire pour que l'un des Δ principaux soit nul. Soit $p < \varkappa$ ou $p + \pi < n$; si les éléments ont un point commun, il y a un des Δ principaux qui est nul et le moment est nul, mais cela fait $\varkappa - p + 1$ conditions non nécessaires; pour que le moment soit nul, ou que l'un des Δ principaux soit nul, il faut et il suffit, d'après l'équation aux $1 - \Delta^2$ ou d'après le théorème qu'on en a déduit, que, dans l'élément $M_{p+\pi}$ qui contient les deux éléments donnés, la fonction ponctuelle de $p + \pi$ points soit nulle, et, pour cela, il suffit que cet élément $M_{p+\pi}$ soit conjugué de lui-même. Par exemple, dans le cas de deux points, le moment n'est autre chose que la fonction ponctuelle, et l'on sait qu'elle est nulle si le rayon des deux points est conjugué de lui-même. Dans le cas général, il est facile d'apercevoir le Δ qui est nul : l'élément $M_{p+\pi}$ étant conjugué de lui-même, il y a dans cet élément un point qui appartient à $N^{p+\pi}$; comme les deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ sont associables dans $M_{p+\pi}$, on comprend que par ce point passe un rayon qui rencontre M_p^q et $M_\pi^\varkappa$; il rencontre aussi N_q^p et $N_\varkappa^\pi$, et c'est un des



rayons qui rencontrent les éléments donnés et leurs transformés; mais ce rayon est conjugué de lui-même, car il est dans $M_{p+\pi}$ et son axe transformé passe par $N^{p+\pi}$ et, en particulier, par le point considéré plus haut; dès lors, le σ (ou le Δ) fourni par ce rayon est égal à o.

Dans l'hypothèse $\varkappa < p$, on aurait un résultat analogue au précédent.

Pour deux éléments M_p^q M_q^p, le moment est nul s'ils sont associés.

112. Moment d'un système d'éléments. — Soient des éléments quelconques A, B, C, D, E, mais tels que le nombre des points nécessaires pour les définir est tout au plus égal à n : on peut appeler *moment* de ce système d'éléments l'expression

$$(A, B, C, D, E) = (D, E)(C, DE)(B, CDE)(A, BCDE),$$

DE désignant l'élément le plus simple circonscrit aux deux éléments D et E; c'est un moment ponctuel; quand les éléments donnés sont des points, on a la fonction ponctuelle. De même, soient des éléments quelconques a, b, c, d, e, mais tels que le nombre des tropes nécessaires pour les définir est tout au plus égal à n : on peut appeler *moment* de ce système d'éléments l'expression

$$(a, b, c, d, e) = (d, e)(c, de)(b, cde)(a, bcde).$$

de désignant l'élément qui est l'intersection des éléments d et e; c'est un moment tangentiel; quand les éléments donnés sont des tropes, on a la fonction tangentielle.

On a la formule générale

$$(A, B, C, D, E) = (A, B, C)(D, E)(ABC, DE),$$

qui donnerait lieu à un grand nombre de conséquences; on en conclut, en particulier, qu'on peut changer l'ordre des éléments sans changer la valeur absolue du moment. Quant au signe, la définition montre que, si l'on échange les deux derniers éléments D et E, le moment est multiplié par $\frac{(D, E)}{(E, D)}$; la formule montre ensuite que, si l'on échange deux éléments consécutifs B et C, le moment est multiplié par $\frac{(B, C)}{(C, B)}$.

§ II.

113. **Équation aux Δ^2 principaux en fonction des coordonnées.** — Les deux éléments $M_p^q\ M_\pi^\varkappa$ étant définis par des points, si l'on prend l'équation aux $1-\Delta^2$, elle donne facilement

$$\left\| \begin{matrix} x_{\prime}^{1} & -\Delta^2 x_{\prime}^{1} \\ \xi_{\prime}^{1} & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \dfrac{u_{\prime}^{1}}{h^1} & \dfrac{u_{\prime}^{1}}{h^1} \\ \dfrac{\upsilon_{\prime}^{1}}{h^1} & 0 \end{matrix} \right\| = 0;$$

si l'on fait porter les $1-\Delta^2$ sur les termes $\gamma(\mathfrak{M}\mathfrak{M})$ on obtient l'équation sous une autre forme avec δ racines parasites égales à 1. Pour $p \leqq \varkappa$ ou $p+\pi \leqq n$, l'équation n'a pas de racine nulle étrangère; pour $p+\pi = n+\omega$, il faut diviser le premier membre par $(\Delta^2)^\omega$.

Pour ramener le terme du plus haut degré en $(-\Delta^2)$ à avoir pour coefficient l'unité, il faut diviser par $\sigma^2\sigma'^2$, en désignant par σ et σ' les fonctions ponctuelles des deux systèmes de points; et alors le coefficient du terme en $(-\Delta^2)^{p-\mathrm{R}}$, $\mathrm{R} \leqq {}^{p}_{\varkappa}$, est une somme de produits dont l'un s'obtient comme il suit. On prend des indices fixes en nombre $p-\mathrm{R}$, des indices fixes en nombre $\varkappa-\mathrm{R}$, ces deux séries d'indices pouvant avoir des indices communs en nombre θ; nous désignerons ces indices communs par $g \ldots g$: les premiers indices seront $f \ldots fg \ldots g$, le nombre des f étant $p-\mathrm{R}-\theta$, les seconds indices seront $h \ldots hg \ldots g$, le nombre des h étant $\varkappa-\mathrm{R}-\theta$; en posant

$$p-\mathrm{R} = \pi-\mathrm{S} \qquad \text{ou} \qquad \varkappa-\mathrm{R} = q-\mathrm{S},$$

il reste des indices en nombre $\mathrm{R}+\mathrm{S}+\theta$, que nous désignerons par $i \ldots ij \ldots j$, les indices i étant en nombre R et les indices j en nombre $\mathrm{S}+\theta$; pour abréger, nous désignerons les suites d'indices $f \ldots g \ldots h \ldots i \ldots j \ldots$ par FGHIJ, et le nombre de ces indices est donné par le Tableau suivant :

Indices.......	G	F	H	I	J
Nombre......	θ	$p-\mathrm{R}-\theta$	$\varkappa-\mathrm{R}-\theta$	R	$\mathrm{S}+\theta$.

L'un des facteurs du produit, donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{,}^{\mathrm{F}} & x_{,}^{\mathrm{IJ}} & x_{,}^{\mathrm{FG}} \\ \xi_{,}^{\mathrm{F}} & \xi_{,}^{\mathrm{IJ}} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 0 & x_{,}^{\mathrm{IJ}} & x_{,}^{\mathrm{FG}} \\ \xi_{,}^{\mathrm{F}} & \xi_{,}^{\mathrm{IJ}} & 0 \end{vmatrix},$$

est alors

$$\sum(-1)^{(\mathrm{GI,J})}\Sigma_{\mathrm{FGI}}\, x^{\mathrm{FGI}}.\Sigma_{\mathrm{FJ}}\,\xi_{\mathrm{HGI}}^{\mathrm{FJ}},$$

les indices étant dans l'ordre naturel; le $\sum$ est relatif aux différents groupes de R indices i que peuvent donner les $\mathrm{R}+\mathrm{S}+\theta$ indices IJ; les fonctions tangentielles sont relatives à la figure de référence. L'autre facteur est analogue : les x et les ξ sont remplacés par des $\underline{u}$ et des $\underline{\upsilon}$, les Σ sont remplacés par des σ; mais chaque terme est divisé par un produit de h qui est d'ailleurs le même pour tous, et qu'on peut remplacer par la quantité

$$\Sigma_{\mathrm{FG}}\,\Sigma_{\mathrm{FIJ}} \times \sigma_{\mathrm{FG}}\,\sigma_{\mathrm{FIJ}} \times \eta^{\mathrm{FG}}\,\eta_{\mathrm{HG}}^{\mathrm{FIJ}}.$$

Or, d'après le n° 9, où l'on échange F et H et où l'on prend pour indices J d'une part GI d'autre part G, on a

$$(-1)^{\mathrm{GI,J}}\,\Sigma_{\mathrm{FGI}}\,\Sigma_{\mathrm{FJ}}\,\eta^{\mathrm{FGI,FJ}} = (-1)^{\mathrm{G,IJ}}\,\Sigma_{\mathrm{FG}}\,\Sigma_{\mathrm{FIJ}}\,\eta^{\mathrm{FG,FIJ}};$$

on a encore

$$(-1)^{\mathrm{GI,J}}\,\sigma_{\mathrm{FGI}}\,\sigma_{\mathrm{FJ}}\,\eta_{\mathrm{FGI,FJ}} = (-1)^{\mathrm{G,IJ}}\,\sigma_{\mathrm{FG}}\,\sigma_{\mathrm{FIJ}}\,\eta_{\mathrm{FG,FIJ}},$$

et, dans cette formule, en définissant les $\underline{\eta}$ du polytrope $\underline{\mathrm{P}}$ comme ceux du polytrope P, on peut souligner les η en mettant en haut les indices qui sont en bas.

Alors, le terme considéré plus haut, et qui est un terme du coefficient de $(-\Delta^2)^{p-\mathrm{R}}$, a pour valeur

$$\frac{\eta^{\mathrm{FG,FIJ}}\,\underline{\eta}^{\mathrm{FG,FIJ}}}{\eta^{\mathrm{FG}}\,\eta_{\mathrm{HG}}^{\mathrm{FIJ}}} \times \sum \frac{x^{\mathrm{FGI}}\,\xi_{\mathrm{HGI}}^{\mathrm{FJ}}}{\eta^{\mathrm{FGI,FJ}}} \sum \frac{\underline{u}^{\mathrm{FGI}}\,\underline{\upsilon}_{\mathrm{HGI}}^{\mathrm{FJ}}}{\underline{\eta}^{\mathrm{FGI,FJ}}};$$

les $\eta^{\mathrm{FGI,FJ}}$ sont les moments réduits des éléments de référence auxquels se rapportent les coordonnées qui figurent en numérateur; on aurait pu écrire, par analogie avec la formule du n° 55,

$$\sum \frac{\xi_{\mathrm{HGI}}}{\eta_{\mathrm{HIJ,HGI}}}\, x^{\mathrm{FGI}}.$$

On fait ensuite varier les indices fixes, et l'on obtient des termes

de différentes espèces d'après le nombre θ des indices g (*voir* un exemple au n° 126). Ces termes se simplifient pour $\theta = 0$.

114. Pour $p \leqq \varkappa$, l'équation précédente est bonne; pour $p \gtreqless \varkappa$, il faut diviser le premier membre par $(-\Delta^2)^{p-\varkappa}$, ce qui remplace $(-\Delta^2)^{p-R}$ par $(-\Delta^2)^{\varkappa-R}$; c'est donc l'un ou l'autre selon qu'on a $p + \pi \leqq n$ ou $\varkappa + q \leqq n$. Si l'on suppose les deux éléments définis par des tropes, l'équation se présente avec le degré $\varkappa$ qui est exact pour $\varkappa \leqq p$; pour $\varkappa \gtreqless p$, il faut diviser le premier membre par $(-\Delta^2)^{\varkappa-p}$, ce qui la ramène au degré p. Les coefficients se présentent sous la même forme que ci-dessus; il faut, en effet, échanger les lettres x et ξ, et mettre en bas les indices qui sont en haut et réciproquement, en échangeant F et H : or cela ne change rien.

L'ordre des deux éléments étant $M_p^q M_\pi^\varkappa$, les points du premier et les tropes du second jouent des rôles analogues dans le terme obtenu à la fin du n° 113 : on a le produit $x^{FGI} \xi_{HGI}$. Pour deux éléments $M_p^q M_p^q$, l'équation aurait une seconde forme, en échangeant x et ξ, et cela sans racine parasite égale à 1.

Si, au lieu des deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$, on considère leurs transformés ou leurs primitifs, l'équation aux Δ principaux est la même. On peut remarquer à ce propos que, pour passer de l'équation aux Δ principaux pour deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ à l'équation relative à deux éléments $M_\varkappa^\pi M_q^p$, il faut échanger x et ξ, en échangeant en même temps F et H.

115. **Expression du moment.** — Pour avoir le carré du moment, en supposant $p + \pi \leqq n$ (Géométrie dans un élément), il faut faire $R = p$, ce qui exige $\theta = 0$; il n'y a plus ni indices f, ni indices g. Le nombre des indices h est $\varkappa - p$ ou ω, en faisant $p + \pi = n - \omega$, et chaque système d'indices h donne pour le carré du moment un terme qui est un produit de deux facteurs : le nombre des indices i est p, le nombre des indices j est π, et ces indices sont pris de toutes les manières possibles parmi les $n - \omega$ indices autres que les indices h; les indices HIJ forment la série complète des indices 1, 2, ..., n. On a pour le carré du moment

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{1}{\eta_{\text{II}}} \sum \frac{x^{\text{I}} \xi^{\text{J}}_{\text{HI}}}{\eta^{\text{I,J}}} \sum \frac{\underline{u}^{\text{I}} \underline{\upsilon}^{\text{J}}_{\text{HI}}}{\underline{\eta}^{\text{I,J}}} + \ldots,$$

la somme étant relative à tous les systèmes de ω indices II; la quantité $\eta^{\mathrm{I,J}}$ est le moment des deux éléments de référence $A_q^p A_\varkappa^\pi$ auxquels se rapportent les coordonnées du numérateur.

Si l'on suppose $p+\pi \gtreqless n$ (Géométrie autour d'un élément), l'équation aux Δ^2 a des racines nulles en nombre $p-\varkappa$ et pour avoir le carré du moment il faut faire $\mathrm{R}=\varkappa$, ce qui exige $\theta = 0$; il n'y a plus ni indices h ni indices g. Le nombre des indices f est $p-\varkappa$ ou ω en posant $p+\pi = n+\omega$, le nombre des indices i est $\varkappa$, le nombre des indices j est q, et les indices FIJ forment la série complète des indices $1, 2, \ldots, n$. On a

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{1}{\eta^{\mathrm{F}}} \sum \frac{x_{\mathrm{J}}^{\mathrm{FI}}\,\xi_{\mathrm{I}}}{\eta_{\mathrm{J,I}}} \sum \frac{\underline{\underline{u}}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{FI}}\,\underline{\underline{\upsilon}}_{\mathrm{I}}}{\underline{\eta}_{\mathrm{J,I}}} + \ldots.$$

Il est intéressant de comparer cette formule à la précédente. On a deux éléments $\mathrm{M}_p^q\,\mathrm{M}_\pi^\varkappa$, avec deux cas possibles $p<\varkappa$ ou $\varkappa<p$; pour déduire la formule du second cas de celle du premier cas, on échange x et ξ, et l'on met en bas les indices qui sont en haut et réciproquement avec échange de F et H. Ce résultat se comprend bien en supposant que, dans le second cas, les deux éléments sont définis par des tropes comme au n° 114.

Pour deux éléments associables, $p+\pi = n$, on a

$$\mathfrak{M}^2 = \sum \frac{x^{\mathrm{I}}\,\xi^{\mathrm{J}}}{\eta^{\mathrm{I,J}}} \sum \frac{\underline{\underline{u}}^{\mathrm{I}}\,\underline{\underline{\upsilon}}^{\mathrm{J}}}{\underline{\eta}^{\mathrm{I,J}}};$$

les deux facteurs du second membre sont égaux et l'on retrouve la formule du n° 55 qui donne un signe au moment.

116. On peut vérifier le résultat précédent et le rendre mnémonique; on suppose $p+\pi<n$: la relation entre les coordonnées d'un élément $\mathrm{M}_{p+\pi}$ conduit au moment des éléments M_p et M_π, et cette méthode a l'avantage de rapprocher tous les moments pour lesquels la somme $p+\pi$ a la même valeur. Considérons l'élément $\mathrm{M}_{p+\pi}$ défini par les p points M et les π points $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire l'élément $\mathrm{M}_{p+\pi}$ circonscrit aux deux éléments donnés; ses coordonnées sont données par des formules dont le type est

$$\begin{bmatrix} x_{\prime}^{i} & x_{\prime}^{j} \\ \xi_{\prime}^{i} & \xi_{\prime}^{j} \end{bmatrix} = \Sigma_{\mathrm{IJ}}\,\sigma\,x^{\mathrm{IJ}},$$

σ désignant ici la fonction ponctuelle des $p+\pi$ points; si l'on développe le déterminant en produits de mineurs d'ordre p multipliés par des mineurs d'ordre π, on obtient (n° 108)

$$\sum \frac{x^{\mathrm{I}}\xi^{\mathrm{J}}}{\eta^{\mathrm{I,J}}} = x^{\mathrm{IJ}} \times \mathfrak{M};$$

c'est une formule de Géométrie dans $M_{p+\pi}$, la figure de référence étant un élément $M^{p+\pi}$ (Chap. VIII). On aurait de même

$$\sum \frac{\underline{u}^{\mathrm{I}}\,\underline{v}^{\mathrm{J}}}{\underline{\eta}^{\mathrm{I,J}}} = \underline{u}^{\mathrm{IJ}} \times \mathfrak{M}.$$

Si l'on se reporte alors à la relation entre les coordonnées de l'élément $M_{p+\pi}$, qui est

$$\frac{x^{\mathrm{IJ}}\,\underline{u}^{\mathrm{IJ}}}{\eta_{\mathrm{II}}} + \ldots = 1,$$

on retrouve le résultat précédemment obtenu.

Au n° 54, dans le calcul de la relation entre les coordonnées normales de l'élément $M_{p+\pi}$, on a eu recours à la formule du n° 38 qui donne σ^2; en écrivant la formule sur laquelle repose le calcul du n° 113 réduit à la recherche de $\mathfrak{M}^2$, on reconnaît que les deux modes de calcul de $\mathfrak{M}^2$ sont en somme identiques.

Lorsque l'élément $M_{p+\pi}$ est conjugué de lui-même, on a

$$\frac{x^{\mathrm{IJ}}\,\underline{u}^{\mathrm{IJ}}}{\eta_{\mathrm{II}}} + \ldots = 0,$$

et cela correspond à $\mathfrak{M} = 0$; la fonction ponctuelle des $p+\pi$ points est nulle.

[La méthode précédente peut être étendue. Considérons deux éléments $M_p^q\, M_\pi^\varkappa$ pour lesquels on a $p+\pi < n$ et deux autres éléments de même espèce que les premiers $N_p^q\, N_\pi^\varkappa$; on pourra calculer le produit du moment des deux éléments M par le moment des deux éléments N, multiplié par le comoment des deux éléments $M_{p+\pi}\, N_{p+\pi}$ que déterminent les éléments donnés; cette expression sera nulle lorsque les deux éléments $M_{p+\pi}\, N_{p+\pi}$ seront conjugués. Par exemple, dans l'espace réel, M_p^q et $M_\pi^\varkappa$ peuvent être un point et une droite.]

117. Considérons le cas particulier de deux éléments $M_p M_\pi$ pour lesquels on a

$$p + \pi = n - 1.$$

L'élément $M_{p+\pi}$ est alors un trope, et la relation entre ses coordonnées peut s'écrire sous la forme d'un déterminant égal à o ; on obtient alors sous une forme simple, et en fonction des seules coordonnées x et ξ, le moment des deux éléments. C'est ainsi que, dans l'espace réel, le carré de la distance d'un point à une droite en coordonnées tétraédriques est donné par une formule simple.

118. **Moments réduits. Explication des coefficients** A_P. — Lorsque les deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ ont en commun un élément inscrit M_{p-P}, un élément circonscrit $M^{\varkappa-P}$ (Géométrie autour d'un élément, dans un élément ; par exemple, droites autour d'un point dans un plan), on peut appeler *moment réduit* le produit des Δ principaux qui ne sont pas nuls ; le carré de cette quantité est le coefficient A_P du terme en $(-\Delta^2)^{p-P}$ de l'équation générale, les coefficients suivants étant nuls. Nous allons trouver une propriété de ce moment.

Considérons des points en nombre $p - P = \pi - Q$ dont les indices seront désignés dans leur ensemble par A, des points d'indices D en nombre P, des points d'indices E en nombre Q ; nous avons deux éléments $M_p M_\pi$ ayant un élément M_{p-P} inscrit commun, un élément $M^{\varkappa-P}$ circonscrit commun. Définissons une quantité μ par la relation (*voir* le n° 9)

$$\sigma_{AD}\,\sigma_{AE}.\,\mu = \sigma_A\,\sigma_{ADE},$$

l'ordre des indices étant celui que la notation indique ; nous allons voir que μ est le moment réduit des deux éléments $M_{AD} M_{AE}$, considérés autour de M_A dans M_{ADE}.

Écrivons l'identité

$$\begin{vmatrix} x_A^{FG} & x_A^F & x_A^{IJ} \\ x_D^{FG} & x_D^F & x_D^{IJ} \\ 0 & x_A^F & x_A^{IJ} \\ 0 & x_E^F & x_E^{IJ} \end{vmatrix} = \left| x_A^{FG} \right| \times \begin{vmatrix} x_D^F & x_D^{IJ} \\ x_A^F & x_A^{IJ} \\ x_E^F & x_E^{IJ} \end{vmatrix},$$

les indices GFIJ étant respectivement en nombre θ, $p - \mathrm{P} - \theta$, P, $\mathrm{Q} + \theta$; dans la deuxième colonne du premier membre on peut remplacer les premiers $x_{\mathrm{A}}^{\mathrm{F}}$ et les $x_{\mathrm{D}}^{\mathrm{F}}$ par des zéros, et en développant le premier membre en produits de mineurs d'ordre p par des mineurs d'ordre π on obtient

$$(-1)^{\mathrm{P}\theta}\mu.\frac{x^{\mathrm{FG}}\,\xi_{\mathrm{HG}}^{\mathrm{FIJ}}}{\eta^{\mathrm{FG,FIJ}}} = \sum \frac{x^{\mathrm{FGI}}\,\xi_{\mathrm{HGI}}^{\mathrm{FJ}}}{\eta^{\mathrm{FGI,FJ}}},$$

en appelant x^{FG} une coordonnée de l'élément inscrit commun, et ξ_{HG} une coordonnée de l'élément circonscrit commun ; c'est une formule de Géométrie autour d'un élément, dans un élément, avec une figure de référence qui est simple dans le cas $\theta = 0$; la notation A, D, E est en harmonie avec la notation F, I, J. On voit déjà que μ est indépendant des points choisis pour définir les trois éléments. On a une formule analogue avec des $\underline{u}$, des $\underline{\upsilon}$, des η. Écrivons alors la relation entre les coordonnées de l'élément $\mathrm{M}_{p-\mathrm{P}}$ et la relation entre les coordonnées de l'élément $\mathrm{M}^{\varkappa-\mathrm{P}}$; nous aurons

$$\sum \frac{x^{\mathrm{FG}}\,\underline{u}^{\mathrm{FG}}}{\eta^{\mathrm{FG}}} = 1,$$

$$\sum \frac{\xi_{\mathrm{HG}}\,\underline{\upsilon}_{\mathrm{HG}}}{\eta_{\mathrm{HG}}} = 1;$$

et, en multipliant,

$$\frac{x^{\mathrm{FG}}\,\xi_{\mathrm{HG}}\,\underline{u}^{\mathrm{FG}}\,\underline{\upsilon}_{\mathrm{HG}}}{\eta^{\mathrm{FG}}\,\eta_{\mathrm{HG}}} + \ldots = 1:$$

en tenant compte des relations ci-dessus, on obtient pour μ^2 le coefficient du terme $(-\Delta^2)^{p-\mathrm{P}}$ dans l'équation aux Δ^2 ; il en résulte que la quantité désignée par μ est le moment réduit.

Ce moment a une propriété corrélative de la précédente, qu'on obtiendrait en définissant les éléments par des tropes. Au n° 9, on vérifie la concordance de ces deux propriétés pour des η qui sont des moments réduits, à l'aide des formules du n° 6 ; comme celles-ci peuvent se déduire des formules des n°s 7 et 8, lesquelles ont été étendues à un polytrope quelconque (n°s 56 et 51), la vérification peut être généralisée.

En posant $p - \mathrm{P} = \rho$, $\varkappa - \mathrm{P} = \sigma$, on voit que la relation entre les coordonnées d'un élément M_ρ, multipliée par la relation entre

les coordonnées d'un élément M^σ, conduit au moment réduit des deux éléments $M_{\rho+P}^{\sigma+Q} M_{\rho+Q}^{\sigma+P}$, quel que soit P, ces deux éléments étant supposés avoir un élément M_ρ inscrit commun.

Le coefficient A_P de l'équation aux Δ^2 principaux est lié à l'écriture $M_{\rho+P}^{\sigma+Q} M_{\rho+Q}^{\sigma+P}$. Ajoutons que, pour $P = 0$, la loi générale des coefficients de l'équation aux Δ^2 principaux donne le coefficient A_0 sous la forme du polynôme égal à 1 qui est écrit plus haut.

Les deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ ayant en commun un élément inscrit M_{p-P}, un élément circonscrit $M^{\varkappa-P}$, si l'un de ces éléments est conjugué de lui-même, on a

$$\sum \frac{x^{FG}\, u^{FG}}{\eta^{FG}} = 0$$

ou

$$\sum \frac{\xi_{HG}\, \vartheta_{HG}}{\eta_{HG}} = 0;$$

le moment réduit des deux éléments considérés est alors égal à o.

[On pourrait considérer deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ ayant en commun un élément inscrit M_{p-P} et un élément circonscrit $M^{\varkappa-P}$, deux éléments $N_p^q N_\pi^\varkappa$ ayant en commun un élément inscrit N_{p-P} et un élément circonscrit $N^{\varkappa-P}$, et calculer le produit du moment réduit des deux éléments $M_p M_\pi$ par le moment réduit des deux éléments $N_p N_\pi$, multiplié par le comoment des deux éléments inscrits $M_{p-P} N_{p-P}$ et par le comoment des deux éléments circonscrits $M^{\varkappa-P} N^{\varkappa-P}$; cette expression sera nulle lorsque les deux éléments inscrits seront conjugués, et aussi lorsque les deux éléments circonscrits seront conjugués. Par exemple, dans l'espace réel, on peut considérer deux systèmes de deux droites concourantes.]

119. Pour les deux éléments de référence $A_{FI} A_{FJ}$, on vérifie facilement la relation donnée plus haut, avec $\theta = 0$.

120. **Conditions pour que $M_p^q M_\pi^\varkappa$ aient M_ρ inscrit commun, M^σ circonscrit commun.** — Lorsque deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ ont un élément M_{p-P} inscrit commun, un élément $M^{\varkappa-P}$ circonscrit commun, tous les termes du coefficient A_{P+1} sont nuls, et l'on a

$$\sum \frac{x^{FGI}\, \xi_{FJ}}{\eta^{FGI,FJ}} = 0,$$

le nombre des indices g étant θ, celui des indices f étant $p-(\mathrm{P}+1)-\theta$, et celui des indices h étant $\varkappa-(\mathrm{P}+1)-\theta$; le nombre des indices i est $\mathrm{P}+1$, celui des indices j est $\mathrm{Q}+1+\theta$, en posant $p-\mathrm{P}=\pi-\mathrm{Q}$.

On aurait d'autres conditions qui se rattacheraient à l'autre forme de l'équation aux Δ^2 principaux.

Si l'on fait $\theta=0$, on a les conditions les plus simples, les mêmes d'ailleurs des deux façons. Les deux éléments inscrit et circonscrit étant désignés par M_ρ et M^σ, pour obtenir un système de conditions distinctes en nombre $\rho\sigma$ (n° 94), il suffit de prendre les $\rho-1$ indices f parmi ρ indices déterminés, et les $\sigma-1$ indices h parmi σ autres indices déterminés.

Pour un point commun, il faut faire $\mathrm{P}=p-1$, $\mathrm{P}+1=p$, et il n'y a pas d'indice g; de même, etc. En supposant $p=1$, on retrouverait les équations ponctuelles d'un élément $\mathrm{M}^{\varkappa}_{\pi}$; pour $\varkappa=1$ on aurait les équations tangentielles d'un élément M^{q}_{p}.

§ III.

121. Équation aux γ^2 principaux. — Étant donnés les deux éléments $\mathrm{M}^{q}_{p}\,\mathrm{M}^{\varkappa}_{\pi}$, dans cet ordre, considérons la suite $\underline{\mathrm{L}^{\pi}_{\varkappa}\,\mathrm{M}^{q}_{p}}\,\underline{\mathrm{M}^{\varkappa}_{\pi}}\,\mathrm{N}^{p}_{q}$ et les rayons qui rencontrent ces quatre éléments (ou les axes qui ont un trope commun avec chacun d'eux) : si l'on veut former l'équation aux Δ principaux pour les deux éléments $\mathrm{L}^{\pi}_{\varkappa}\,\mathrm{M}^{q}_{p}$ ou pour les deux éléments $\mathrm{M}^{\varkappa}_{\pi}\,\mathrm{N}^{p}_{q}$, on aura précisément à considérer ces rayons. Nous donnerons à ces Δ le nom de γ *principaux* pour les deux éléments $\mathrm{M}^{q}_{p}\,\mathrm{M}^{\varkappa}_{\pi}$ pris dans cet ordre, et nous les retrouverons plus loin à un autre point de vue. Le degré de l'équation aux γ^2 principaux est le plus petit des quatre indices $p, q, \pi, \varkappa$.

L'équation aux γ^2 principaux pour les deux éléments donnés est, par définition, l'équation aux Δ^2 principaux pour les deux éléments $\mathrm{M}^{q}_{p}\,\mathrm{L}^{\pi}_{\varkappa}$. Or, les coordonnées $(\mathrm{L}^{\pi}_{\varkappa}, \mathrm{A}^{\varkappa}_{\pi})$ de ce dernier élément sont les coordonnées $(\mathrm{M}^{\varkappa}_{\pi}, \overline{\mathrm{A}^{\pi}_{\varkappa}})$ de l'élément $\mathrm{M}^{\varkappa}_{\pi}$; de même, les coordonnées $(\mathrm{L}^{\pi}_{\varkappa}, \underline{\mathrm{A}^{\varkappa}_{\pi}})$ sont les coordonnées $(\mathrm{M}^{\varkappa}_{\pi}, \mathrm{A}^{\pi}_{\varkappa})$. Il en résulte que, si l'on représente l'équation du n° 113 par la notation

$$f^{q,\varkappa}_{p,\pi}\left(\Delta^2, x^{\mathrm{L}}\xi^{\mathcal{L}}, \underline{x^{\mathrm{L}}\xi^{\mathcal{L}}}\right)=0,$$

l'équation aux γ^2 sera

$$f_{p,\varkappa}^{q,\pi}\left(\gamma^2, x^{\mathrm{L}}\overline{\xi_{\mathcal{L}}}, \underline{\varkappa^{\mathrm{L}}}\,\xi_{\mathcal{L}}\right) = 0.$$

122. Autre point de vue. — Dans ce qui suit, pour éviter toute confusion entre les deux formes de l'équation aux Δ^2, nous dirons la forme 102 et la forme 105 : la première est relative au cas où les deux éléments que l'on considère sont définis l'un par des points et l'autre par des tropes, la seconde est relative au cas où ces deux éléments sont définis par des points.

L'équation 105 donne les valeurs du produit $\gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M})\,\gamma(\mathfrak{M}\mathrm{M})$ ou $\gamma\gamma'$, M et $\mathfrak{M}$ étant les points d'appui sur les deux éléments donnés d'un rayon qui les rencontre ainsi que leurs transformés. On aurait d'une manière analogue l'équation qui donne les valeurs de la quantité γ^2 : il suffit de changer l'ordre des deux points dans les π dernières rangées du premier déterminant; dans le second déterminant, au lieu de $\gamma\gamma'$ on a γ^2, et l'ordre des points est changé dans les π dernières rangées. Or, les deux éléments $\mathrm{M}_p^q\,\mathrm{L}_\varkappa^\pi$ étant alors définis le premier par des points et le second par des tropes, si on leur applique la méthode 102 pour former leur equation aux Δ principaux, on reconnaît que les Δ obtenus sont égaux aux γ que l'on vient de considérer : en sorte que les quantités désignées au n° 121 sous le nom de γ principaux sont les quantités $\gamma(\mathrm{M}\mathfrak{M})$. [On en conclut que si l'on considère les éléments $\mathrm{L}_\varkappa^\pi\,\mathrm{M}_p^q\,\mathrm{M}_\pi^\varkappa\,\mathrm{N}_q^p\,\mathrm{N}_\varkappa^\pi$, à chaque rayon qui rencontre les quatre premiers répond un rayon qui rencontre les quatre derniers.]

123. Comoment de deux éléments. — Le comoment de deux éléments $\mathrm{M}_p^q\,\mathrm{M}_\pi^\varkappa$ pris dans cet ordre, ou le moment des deux éléments $\mathrm{L}_\varkappa^\pi\,\mathrm{M}_p^q$ est le produit des γ principaux ; pour deux éléments de même espèce le comoment est naturellement identique au comoment défini au Chapitre IV.

Ajoutons ici que l'équation aux γ^2 principaux peut avoir des racines nulles; on aurait à reprendre l'idée indiquée au n° 96.

124. Moment de deux éléments pleinement conjugués; etc. — Considérons deux éléments $\mathrm{M}_p^q\,\mathrm{M}_\pi^\varkappa$ formant un système de première espèce, $p + \pi < n$, et supposons que ces deux éléments sont plei-

nement conjugués (n° 96); dans l'équation du n° 105, les valeurs du produit $\gamma\gamma'$ sont nulles, et tous les Δ^2 sont égaux à 1 comme on le verrait d'ailleurs directement. De même, etc. En particulier, le carré du moment (ponctuel ou tangentiel) de deux éléments pleinement conjugués (de première ou de seconde espèce) est égal à 1.

Il en résulte que le carré du comoment de deux éléments dont l'un est inscrit à l'autre est égal à 1.

125. **Équation aux $\gamma\gamma'$ ou aux $1-\Delta^2$.** — Le n° 122 amène un rapprochement entre les équations 102 et 105. Il importe avant tout de mettre en évidence le fait suivant : si dans l'équation 102 on remplace Δ^2 par $1-(1-\Delta^2)$, on a une équation que l'on doit considérer comme donnant les valeurs de la quantité $1-\Delta^2$; l'équation 105 dans laquelle on a remplacé le produit $\gamma\gamma'$ par $1-\Delta^2$ donne les valeurs de la quantité Δ^2; on a ainsi deux équations dont les racines sont complémentaires par rapport à 1 : l'équation 102 ou équation aux $1-\Delta^2$, l'équation 105 ou équation aux Δ^2; l'équation 102 est donnée par un déterminant d'ordre $p+\varkappa$, l'équation 105 est donnée par un déterminant d'ordre $p+\pi$; et la première peut être développée d'une façon analogue à ce qui a été fait pour la seconde au n° 113.

Or il y a de même une équation aux $1-\gamma^2$ et une équation aux γ^2 : au n° 122, on a formé l'équation aux $1-\gamma^2$ [on a appliqué en effet la méthode 102 et il faut remplacer γ^2 par $1-(1-\gamma^2)$], et l'on a rattaché cette équation à l'équation 105 qui est l'équation aux Δ^2 ou aux $1-\gamma\gamma'$; en sorte que l'équation aux $1-\gamma^2$ est liée à l'équation aux Δ^2. Inversement, l'équation aux $1-\Delta^2$ ou aux $\gamma\gamma'$ est liée à l'équation aux γ^2; cette dernière a été écrite au n° 121, et l'équation aux $1-\Delta^2$ peut s'écrire

$$f_{p,\varkappa}^{q,\pi}\left[1-\Delta^2,\ (-1)^{\pi\varkappa} x^{1.}\underline{\xi}\varrho,\ \underline{x}^{1.}\xi\varrho\right]=0.$$

[Dans le cas d'une correspondance par polaires réciproques, l'équation aux $\gamma\gamma'$ est identique à l'équation aux γ^2.]

En résumé, on a une équation aux $1-\Delta^2$ et une équation aux Δ^2, une équation aux $1-\gamma^2$ et une équation aux γ^2; l'équation aux $1-\Delta^2$, étant une équation aux $\gamma\gamma'$, rappelle par sa forme

l'équation aux γ^2, tandis que l'équation aux Δ^2, étant une équation aux $1-\gamma\gamma'$, rappelle par sa forme l'équation aux $1-\gamma^2$.

L'équation aux Δ^2 et l'équation aux $1-\Delta^2$ sont réciproques. Pour passer de la première à la seconde, il faut remplacer la fonction $f_{p,\pi}^{q,\chi}$ par la fonction $f_{p,\chi}^{q,\pi}$, remplacer Δ^2 par $1-\Delta^2$, remplacer $\xi^{\mathfrak{L}}$ par $(-1)^{\pi\chi}\underline{\xi}_{\mathfrak{L}}$ et $\underline{\xi}^{\mathfrak{L}}$ par $\xi^{\mathfrak{L}}$.

126. Exemple. — Nous vérifierons l'équation ci-dessus dans un cas particulier. Considérons deux droites $M_2\mathfrak{M}_2$ dans l'espace réel, et formons l'équation aux Δ principaux pour une corrélation donnée, le tétraèdre de référence étant indifféremment 1234 ou ABCD. Les quantités η des nos 113 et 9 sont des moments de corrélation relatifs aux arêtes du tétraèdre de référence prises deux à deux, les deux arêtes considérées pouvant être associées ou opposées; on a par exemple, en mettant les éléments dans l'ordre qui supprime les signes en évidence,

$$\Sigma(c,b)\,\Sigma(c,a)\,\eta^{cb,ca} = \Sigma(c,b,a),$$
$$\sigma(D,A)\,\sigma(D,B)\,\eta_{DA,DB} = \sigma(D,A,B),$$

et la quantité $\eta_{DA,DB}^{cb,ca}$ est le moment réduit des deux arêtes DB et DA. Le premier terme de l'équation est Δ^4. Dans le terme en $-\Delta^2$, le nombre des indices de chaque espèce est donné par le Tableau

g	f	h	i	j
θ	$1-\theta$	$1-\theta$	1	$1+\theta$

et il faut faire successivement $\theta = 0$, $\theta = 1$. Le terme indépendant est le carré du moment. On a l'équation

$$\begin{aligned}\Delta^4 - \Delta^2 \Bigg[& \frac{1}{h^1 h_2}\left(\frac{x^{13}\xi^{14}}{\eta^{13,14}} + \frac{x^{14}\xi^{13}}{\eta^{14,13}}\right)\left(\frac{\underline{x}^{13}\underline{\xi}^{14}}{\underline{\eta}^{13,14}} + \frac{\underline{x}^{14}\underline{\xi}^{13}}{\underline{\eta}^{14,13}}\right) + \dots \\ & + \left(\frac{x^{12}\xi^{34}}{\eta^{12,34}} + \frac{x^{13}\xi^{24}}{\eta^{13,24}} + \frac{x^{14}\xi^{23}}{\eta^{14,23}}\right)\left(\frac{\underline{x}^{12}\underline{\xi}^{34}}{\underline{\eta}^{12,34}} + \dots\right) + \dots \Bigg] \\ & + \left[\frac{x^{12}\xi^{34}}{\eta^{12,34}} + \dots\right]\left[\frac{\underline{x}^{12}\underline{\xi}^{34}}{\underline{\eta}^{12,34}} + \dots\right] = 0.\end{aligned}$$

Lorsque les deux droites sont associées, le terme indépendant de cette équation est nul. Lorsque les deux droites sont identiques, le coefficient de Δ^2 est nul, chaque terme étant nul : les termes de

la seconde ligne sont nuls par la relation entre les coordonnées homogènes d'une droite, les termes de la première ligne sont nuls parce que, dans le cas général, on peut les écrire sous la forme

$$\frac{x^{13}\xi^{14} - x^{14}\xi^{13}}{\eta^{13,14}}.$$

On remarque alors que, dans le cas de deux droites identiques, on a encore $\frac{x^{12}\xi^{34} - x^{34}\xi^{12}}{\eta^{12,34}} = 0$, et l'on est conduit à introduire de nouveaux termes dans le coefficient de Δ^2, en les détruisant par d'autres. Or, si l'on considère les termes de la seconde ligne dans ce coefficient, et qu'on en retranche le terme indépendant de l'équation (en se réservant de l'ajouter ensuite), il reste après réduction trois termes de la forme

$$\left(\frac{x^{12}\xi^{34} - x^{34}\xi^{12}}{\eta^{12,34}}\right)\left(\frac{\underline{x}^{12}\underline{\xi}^{34} - \ldots}{\underline{\eta}^{12,34}}\right).$$

Remarquons maintenant que les termes de la première ligne dans le coefficient de Δ^2 peuvent être écrits autrement. Étant donnés deux éléments $M_p^q \underline{M}_p^q$, lorsqu'on cherche dans l'équation aux Δ^2 la partie du coefficient de $(-\Delta^2)^{p-1}$ qui répond à $\theta = 0$, il faut faire $R = S = 1$, et l'un des termes est de la forme (début du n° **113**)

$$\frac{\Sigma_{F1}\Sigma_{F2}(x^{F1}\xi^{F2} - x^{F2}\xi^{F1}) \times \sigma_{F1}\sigma_{F2}(\underline{u}^{F1}\underline{\upsilon}^{F2} - \underline{u}^{F2}\underline{\upsilon}^{F1})}{h^f\ldots h^f h^1 . h^f \ldots h^f h^2};$$

en transformant le dénominateur d'après des formules données au n° **8**, on obtient

$$\frac{(x^{F1}\xi^{F2} - \ldots)(\underline{u}^{F1}\underline{\upsilon}^{F2} - \ldots)}{\eta^{F1}\eta^{F2}}.$$

[On peut voir, à ce propos, ce que devient la formule du n° **118** pour deux éléments M_p^q qui ont M_{p-1} inscrit commun, M^{q-1} circonscrit commun, en faisant $\theta = 0$; on a alors des indices f en nombre $p-1$, des indices h en nombre $q-1$, il reste deux indices i et j, et l'on a la formule

$$\mu . \eta^{Fi,Fj} \times x^F \xi^H = \begin{vmatrix} x^{Fi} & x^{Fj} \\ \xi^{Fi} & \xi^{Fj} \end{vmatrix},$$

qui rentre dans le théorème des déterminants des moments (n° **150**).]

Les premiers termes du coefficient de Δ^2 deviennent

$$\frac{x^{13}\,\xi^{14} - x^{14}\,\xi^{13}}{\eta^{13}\,\eta^{14}}\left(\underline{x}^{13}\,\underline{\xi}^{14} - \ldots\right);$$

et l'on aurait pu les écrire ainsi immédiatement.

On est alors conduit à mettre l'équation aux Δ^2 sous la forme

$$\Delta^4 - \Delta^2(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + \mathrm{B} = 0,$$

$$\mathrm{A} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{x^{12}}{\eta^{12}} \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\xi^{12}}{\eta^{12}} \cdots\cdots\cdots \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \underline{x}^{12} \cdots\cdots\cdots \\ \underline{\xi}^{12} \cdots\cdots\cdots \end{matrix} \right\|,$$

$$\mathrm{B} = \left(\frac{x^{12}\,\xi^{34}}{\eta^{12}} + \ldots\right)\left(\frac{\underline{x}^{12}\,\underline{\xi}^{34}}{\eta^{12}} + \ldots\right).$$

Dans cette équation, le fait que les deux droites jouent le même rôle est en évidence, ce qui n'avait pas lieu avec la première forme, l'une étant alors considérée au point de vue ponctuel et l'autre au point de vue tangentiel. Cette équation offre d'ailleurs un intérêt particulier comme étant relative à deux droites dans l'espace réel.

Si l'on pose maintenant $\dfrac{\Delta^2}{1-\Delta^2} = k^2$, on obtient l'équation

$$k^4(1-\mathrm{A}) - k^2(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + \mathrm{B} = 0,$$

et l'on peut écrire

$$\Delta^4(1-\mathrm{A}) - \Delta^2(1-\Delta^2)(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + \mathrm{B}(1-\Delta^2)^2 = 0;$$

pour $\mathrm{B} = 0$ on a une valeur nulle de Δ, pour $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{A} = 0$ on a deux valeurs nulles de Δ; pour $\mathrm{A} = 1$ on a une valeur nulle de $1 - \Delta^2$; pour $\mathrm{A} = 1$, $\mathrm{B} = 1$ on a deux valeurs nulles de $1 - \Delta^2$. On est ainsi conduit à poser

$$\mathrm{A}' + \mathrm{B} = \mathrm{B}' + \mathrm{A} = 1$$

et l'équation aux valeurs de $1 - \Delta^2$ prend la forme

$$(1-\Delta^2)^4 - (1-\Delta^2)(\mathrm{A}'+\mathrm{B}') + \mathrm{B}' = 0.$$

Or, dans le cas actuel, les deux fonctions $f_{p,\pi}^{q,\chi}$ et $f_{p,\chi}^{q,\pi}$ sont iden-

tiques; on doit donc avoir d'après le nº 125

$$A' = \left\| \begin{matrix} \frac{x^{12}}{\eta^{12}} \dots\dots\dots \\ \frac{\xi_{12}}{\eta^{12}} \dots\dots\dots \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \underline{x}^{12} \dots\dots\dots \\ \xi_{12} \dots\dots\dots \end{matrix} \right\|,$$

$$B' = \left(\frac{x^{12}\,\underline{\xi}_{34}}{\eta^{12}} + \dots \right) \left(\frac{\underline{x}^{12}\,\xi_{34}}{\eta^{34}} + \dots \right);$$

on s'en assure facilement en mettant A sous la forme d'un déterminant qui est $1 - B'$, et A' sous la forme d'un déterminant qui est $1 - B$.

Si l'on remplace $1 - \Delta^2$ par $\gamma\gamma'$, on voit que le coefficient B' doit être le produit des comoments des deux droites, prises successivement dans l'ordre $M_2 \mathfrak{M}_2$ et dans l'ordre $\mathfrak{M}_2 M_2$; c'est bien ce qui a lieu.

Si l'on reprend l'équation aux valeurs de k^2 donnée plus haut, en posant $A - B = A' - B' = C$, on peut l'écrire sous la forme

$$B'k^4 - Ck^2 + B = 0.$$

En conservant seulement les coefficients B et B' on a encore l'équation très simple

$$\frac{B}{\Delta^2} + \frac{B'}{1 - \Delta^2} = 1.$$

On remarquera que l'équation aux Δ^2 pour deux droites dans l'espace réel peut s'écrire

$$\Delta^4 - \Delta^2 \left\{ \left| \begin{matrix} 1 & ((M_2, \mathfrak{M}_2)) \\ ((\mathfrak{M}_2, M_2)) & 1 \end{matrix} \right| + (M_2, \mathfrak{M}_2)^2 \right\} + (M_2, \mathfrak{M}_2)^2 = 0;$$

l'équation $\frac{B}{\Delta^2} + \frac{B'}{1 - \Delta^2} = 1$ devient alors

$$\frac{(M_2 \mathfrak{M}_2)^2}{\Delta^2} + \frac{((M_2 \mathfrak{M}_2))((\mathfrak{M}_2 M_2))}{1 - \Delta^2} = 1,$$

et il est facile d'en rendre compte en écrivant

$$\frac{\Delta^2 \Delta_1^2}{\Delta^2} + \frac{\gamma\gamma_1 \cdot \gamma'\gamma'_1}{\gamma\gamma'} = 1;$$

Δ et Δ_1 sont relatifs aux deux rayons qui rencontrent les deux droites et leurs transformées.

127. Autre exemple. — Pour un point et un trope, on a

$$\Delta^2 = \left(\frac{x_1 x^1}{h^1} + \ldots\right)\left(\frac{\underline{x}_1 \underline{x}^1}{h_1} + \ldots\right).$$

Pour deux points, en appliquant la remarque faite plus haut relativement à deux éléments $M_p^q\, M_p^q$, on a facilement la formule connue

$$\sigma^2 = \left\| \begin{matrix} x^1 \ldots\ldots\ldots \\ \\ \xi^1 \ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \dfrac{\underline{x}^1}{h^1} \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\underline{\xi}^1}{h^1} \ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\|.$$

On doit donc avoir pour un point et un trope, d'après le n° 125,

$$1 - \Delta^2 = (-1)^{n-1} \left\| \begin{matrix} x^1 \ldots\ldots\ldots \\ \\ \underline{x}_1 \ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \dfrac{x^1}{h^1} \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1}{h^1} \ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\|,$$

et cette formule est exacte. On doit avoir pour deux points

$$1 - \sigma^2 = (-1)^{n-1} \left(\frac{x^1 \xi^1}{h^1} + \ldots\right)\left(\frac{\underline{x}^1 \xi^1}{h_1} + \ldots\right),$$

et cette formule est exacte.

§ IV.

128. Théorème des 4 éléments. — Considérons deux éléments associables $M_p\, M^p$, un élément M_α inscrit au premier, un élément M^β circonscrit au second, avec $\alpha + \beta = p$, ces deux éléments se déterminant réciproquement parce que M^β passe par M_α, ou M_α est dans M^β; on a ce théorème :

Le moment de deux éléments associables $M_q\, M_p$ est égal au moment du premier avec un élément M_α inscrit au second (moment ponctuel), multiplié par le moment de l'élément $M_{q+\alpha}$ ou M^β, circonscrit aux deux éléments que l'on vient de considérer, avec le second élément donné (moment tangentiel)

$$(M_q\, M_p) = (M_q\, M_\alpha)(M_{q+\alpha}\, M_p);$$

le moment $(M_q\, M_\alpha)$ est un moment dans $M_{q+\alpha}$, le moment

$M_{q+\alpha} M_p$ *est un moment autour de* M_α, *et quand on change le sens dans lequel on dirige* M_α *ou* $M_{q+\alpha}$ *les deux facteurs du produit changent de signe.*

Ou encore :

Le moment de deux éléments (M^q, M^p) *est égal au moment du premier avec un élément* M^β *circonscrit au second (moment tangentiel), multiplié par le moment de l'élément* $M^{q+\beta}$ *ou* M_α, *qui est l'intersection des deux éléments que l'on vient de considérer, avec le second élément donné (moment ponctuel)*

$$(M^q M^p) = (M^q M^\beta)(M^{q+\beta} M^p);$$

avec des remarques comme ci-dessus.

Si l'on compare cette formule à l'autre, les premiers membres diffèrent par le facteur $(-1)^{pq}$; les seconds membres diffèrent par les facteurs $(-1)^{q\beta}$ et $(-1)^{q\alpha}$: par exemple le moment $(M^\beta_{\alpha+q} M^q_{\alpha+\beta})$, quand on change l'ordre des deux éléments, est multiplié par $(-1)^{q\beta}$ parce qu'on le considère autour de M_α. On peut écrire

$$(M^p M_p) = (M^p M_\alpha)(M^\beta M_p),$$
$$(M_p M^p) = (M_p M^\beta)(M_\alpha M^p) :$$

avec le premier énoncé, si l'on considère trois éléments A, B, C, tels que le nombre des points nécessaires pour les définir est n, on a

$$(A, BC) = (A, B)(AB, BC),$$

en désignant par AB l'élément circonscrit défini par A et B; avec le second énoncé, si l'on considère trois éléments $a, b, c, \ldots$. On peut voir dans l'espace réel le cas $p = 2, \alpha = 1$.

Pour démontrer ce théorème, observons que les deux éléments $M^p M_p$ sont deux éléments opposés d'un polytrope dont M_α et M^β font également partie; et faisons d'abord la remarque suivante qui rentre dans une remarque plus générale faite au n° 118, mais qui est indépendante de la notion du moment réduit : les premières formules du n° 6 peuvent se déduire, comme on l'a dit au n° 8, des formules des n°s 7 et 8; comme celles-ci ont été étendues à un polytrope quelconque (n°s 56 et 51), les premières formules du n° 6 sont également générales; alors, comme les formules 1° et 2° du



n° 9 ont été généralisées (n° 108), les formules 2° du n° 9 étendues au cas d'un polytrope quelconque peuvent être transformées, comme on a dit, en des formules contenant des σ. Cela posé, désignons par σ_A la fonction ponctuelle des α points qui définissent M_α, etc. ; nous aurons, comme pour le prototype de référence

$$(-1)^{Q,A}\frac{\sigma_{Q+A}}{\sigma_Q\sigma_A}=(M_q\,M_\alpha),$$

$$(-1)^{Q,B}\frac{s_0\,\sigma_A}{\sigma_{Q+A}\,\sigma_P}=(M_{q+\alpha}\,M_p):$$

en multipliant, on obtient ce qu'on cherche. La démonstration, fondée sur les formules 1° et 2° du n° 9, se rapporte à la forme

$$(M^p\,M_p)=(M^p\,M_\alpha)(M^\beta\,M_p).$$

On peut suivre le raisonnement sur un tétraèdre en supposant $q=p$, $p=2$, $\alpha=1$, $\beta=1$.

[Plus généralement on aurait par les formules du n° 118, pour deux éléments $M_p\,M_\pi$, avec M_α inscrit dans M_p,

$$(-1)^{\Pi,A}\frac{\sigma_{\pi+\alpha}}{\sigma_\pi\sigma_\alpha}=(M_\pi\,M_\alpha),$$

$$(-1)^{\Pi,P=A}\frac{\sigma_\alpha\,\sigma_{\pi+p}}{\sigma_{\pi+\alpha}\,\sigma_p}=(M_{\pi+\alpha}\,M_p),$$

et en multipliant,

$$(M_\pi\,M_p)=(M_\pi\,M_\alpha)(M_{\pi+\alpha}\,M_p);$$

c'est une formule de Géométrie dans $M_{p+\pi}$. De même, etc.

On tire de là une conséquence que j'indiquerai seulement pour le cas de l'espace réel. Étant donnés un point M et un plan m, prenons dans le plan un point A qui détermine avec M une droite α, et menons par A dans le plan m une droite α' qui détermine avec α un plan a ; nous aurons

$$(M\,m)=(MA)(\alpha\alpha')(am).]$$

129. Si l'on écrit

$$(M_{q+\alpha}\,M_p)=\frac{(M_q\,M_p)}{(M_q\,M_\alpha)},$$

on voit que le moment de deux éléments définis par un nombre de points supérieur à n est égal au moment d'un élément inscrit à

l'un avec l'autre, divisé par le moment de cet élément inscrit et de l'élément qui est l'intersection des deux éléments donnés. De même, etc.

130. Voici une application du théorème des quatre éléments. Considérons pour plus de simplicité l'hyperespace M_5^0 et le polytrope dont les sommets sont A, B, C, D, E et les faces a, b, c, d, e. On a

$$\sigma = (\text{ABCDE}) = 1 \times (\text{D}, \text{E}) \times (\text{C}, \text{DE}) \times (\text{B}, \text{CDE}) \times (\text{A}, \text{BCDE}),$$
$$(edcba) = 1 \times (b, a) \times (c, ba) \times (d, cba) \times (e, dcba),$$

ou, en multipliant par $(-1)^{1+2+3+4}$

$$\Sigma = (abcde) = 1 \times (a, b) \times (ab, c) \times (abc, d) \times (abcd, e);$$

en multipliant ces deux formules on a

$$\sigma\Sigma = [(\text{A}, \text{BCDE}) \times 1][(\text{B}, \text{CDE}) \times (a, b)][(\text{C}, \text{DE}) \times (ab, c)] \ldots$$

ou

$$\sigma\Sigma = (\text{A}, a)(\text{B}, b)(\text{C}, c) \ldots,$$

formule déjà obtenue.

131. On peut transformer le théorème des quatre éléments. On fera la figure schématique suivante qui répond à $n = 4$, $q = 1$, $p = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$: un plan M_p, un point M^p, un point M_α dans M_p, une droite M^β passant par M_α et M^p; un plan N^α perpendiculaire à M^β, et le point d'intersection I^p de M^β avec N^α; un plan H_p perpendiculaire à M^β en M_α. (On peut faire une figure analogue sur la sphère, avec $n = 3$, $q = 1$, $p = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$; M_α est le pôle de N^α, I^p est le pôle de H_p.)

On aura d'abord les cas particuliers suivants du théorème (deuxième énoncé) :

1° Considérons deux éléments $H_p\, I^p$ dont le second est transformé du premier : leur moment est 1. En prenant M_α dans le premier, les deux éléments $H_p\, M^\beta$ sont pleinement conjugués de seconde espèce, et leur moment tangentiel a pour carré 1; les deux éléments $M_\alpha\, I^p$ sont pleinement conjugués de première espèce, et leur moment ponctuel a pour carré 1; comme le produit des moments est 1, ils sont de même signe, et l'on a simultanément



autour de M_α et dans M^β

$$(H_p M^\beta) = \varepsilon, \qquad (M_\alpha I^p) = \varepsilon,$$

en désignant par ε l'unité affectée d'un signe.

2° Considérons deux éléments $H_p M^p$; on mène par le second un élément M^β pleinement conjugué du premier (deuxième espèce) c'est-à-dire passant par I_p, et qui coupe le premier suivant M_α; le carré du moment tangentiel $(H_p M^\beta)$ est égal à 1, et l'on a simultanément

$$(H_p M^\beta) = \varepsilon, \qquad (M_\alpha I^p) = \varepsilon;$$

on a alors

$$(H_p M^p) = \varepsilon (M_\alpha M^p).$$

3° Considérons deux éléments $M_p I^p$; on prend dans le premier un élément M_α pleinement conjugué du second (première espèce), c'est-à-dire qui soit dans H_p primitif de I^p ou dont le transformé N^α passe par I^p; il détermine avec I^p un élément M^β; le carré du moment ponctuel $(M_\alpha I^p)$ est égal à 1, et l'on a simultanément

$$(H_p M^\beta) = \varepsilon \quad \text{ou} \quad (M_\alpha I^p) = \varepsilon;$$

on a alors

$$(M_p I^p) = \varepsilon (M_p M^\beta).$$

Cela posé, reprenons les deux éléments $M_p M^p$ (deuxième énoncé), avec M_α dans le premier, M^β passant par le second, M^β passant aussi par M_α; si nous prenons N^α transformé de M_α, son intersection I^p avec M^β, et le primitif H_p de I^p, nous avons un second élément H_p passant par M_α, un second élément I^p situé dans M^β, et celui-ci est le transformé du précédent; H_p est pleinement conjugué de M^β, I^p est pleinement conjugué de M_α; nous avons d'abord

$$(M_p M^p) = (M_p M^\beta)(M_\alpha M^p);$$

or, puisque I^p est transformé de H_p, on a simultanément

$$(H_p M^\beta) = \varepsilon, \qquad (M_\alpha I^p) = \varepsilon;$$

on a alors par la formule ci-dessus

$$(M_p I^p) = \varepsilon (M_p M^\beta),$$
$$(H_p M^p) = \varepsilon (M_\alpha M^p),$$

et la formule devient

$$(M_p M^p) = (M_p I^p)(H_p M^p),$$

où il n'y a que des moments d'éléments associables. On a encore

$$(M^p M_p) = ((M^p I^p))(I^p M_p),$$

etc.

Nous donnerons une application pour $q = 1$, $\alpha = 1$. Si l'on refait la figure schématique en remplaçant M_p par μ, M^p par M_i, M^β par R, I^p par M, M_α par L et H_p par l, on a les éléments μ et M, avec un point L de l'axe $(l\mu)$ qui détermine avec M un rayon R; on a alors

$$\Delta(lM_i) = \varepsilon(LM_i), \qquad \Delta(\mu M) = \varepsilon(\mu R),$$

avec

$$(lR) = \varepsilon \quad \text{ou} \quad \sigma(LM) = \varepsilon,$$

et la première formule est une formule du n° 97 en faisant $\varepsilon = 1$; on a ensuite les formules du n° 102

$$\Delta(\mu M_i) = \Delta(\mu M)\,\Delta(lM_i),$$
$$\Delta(M_i \mu) = \gamma(M_i M)\,\Delta(M\mu).$$

132. Corollaire du théorème des quatre éléments. — Sur la figure schématique du n° 131, on ajoutera en pointillé une perpendiculaire à M_p menée de M^p et coupant N^α en N^p. (On peut, sur la figure sphérique, ajouter en pointillé un grand cercle perpendiculaire à M_p, etc.) On a deux éléments de même espèce $M^p N^p$ par lesquels passent deux éléments $M^\beta N^\alpha (\alpha + \beta = p)$ pleinement conjugués de seconde espèce (l'un détermine l'autre), se coupant suivant I^p; les formules du théorème précédent donnent

$$((M^p N^p)) = ((M^p N^\alpha))((M^\beta N^p)),$$
$$((M^p N^p)) = ((M^p I^p))((I^p N^p)).$$

On aurait un corollaire corrélatif.

Nous donnerons une application (n° 105) pour $p = n - 1$, $\alpha = 1$. Si l'on refait la figure schématique en remplaçant $M^p I^p N^p$ par $M_i M \mathfrak{M}$, on a deux points M_i et $\mathfrak{M}$ par lesquels passent un rayon R et un trope (le primitif de N du n° 105) pleinement conjugués, se coupant en M; on a alors

$$\gamma(M_i \mathfrak{M}) = \gamma(M_i M)\,\gamma(M \mathfrak{M}).$$

[La formule du n° 105 rentre encore dans ceci : Pour trois points ABC, en appelant b et c les deux rayons AC et AB, on a

$$\begin{vmatrix} \gamma(AA) & \gamma(AB) \\ \gamma(CA) & \gamma(CB) \end{vmatrix} = \sigma(AC)\,\sigma(AB)((b, c)),$$

ou

$$\gamma(CB) = \gamma(CA)\,\gamma(AB) + \sigma(AC)\,\sigma(AB)((b, c));$$

lorsque les deux rayons sont conjugués, leur comoment est nul et la formule se simplifie. C'est ce qui arrive ici; le rayon $M_, M$ étant dans M_p^q, l'axe transformé passe par N_q^p et contient le point N, en sorte qu'il est associé au rayon R : les deux rayons sont conjugués.]

Outre les figures schématiques du début, on a une bonne représentation du corollaire en faisant $q = 2$, $p = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$; on a deux droites $M^p N^p$ par lesquelles passent deux plans conjugués $M^\beta N^\alpha$ se coupant suivant une droite I^p; pour la démonstration, le point M_α est dans M^β, et par ce point passe une droite M_p primitive de N^p. On peut suivre sur cette figure les relations qui traduisent le théorème et le corollaire

$$\begin{aligned} (M_p M^p) &= (M_p M^\beta)(M_\alpha M^p) = (M_p I^p)(H_p M^p), \\ ((M^p N^p)) &= ((M^p N^\alpha))((M^\beta N^p)) = ((M^p I^p))((I^p N^p)); \end{aligned}$$

on peut d'ailleurs suivre le passage direct de la première formule à la quatrième : on a d'abord $(M_\alpha M^p) = ((M^p I^p))$ en Géométrie dans M^β; on a de plus, en considérant N_β transformé de M^β (point dans N^α), $(M_p M^\beta) = (N^p N_\beta) = ((I^p N^p))$ en Géométrie dans N^α.

133. **Démonstration analytique du théorème des quatre éléments.** — J'indiquerai cette démonstration sur un exemple. Considérons dans l'espace réel un trope m en un point M, un point $\mathfrak{M}$ du trope, et le rayon R qui passe par M et par $\mathfrak{M}$. On a, par une formule corrélative de celle du n° 116,

$$\frac{x_{23}.x_1}{\eta_{23,1}} + \frac{x_{13}.x_2}{\eta_{13,2}} + \frac{x_{12}.x_3}{\eta_{12,3}} = \xi^4(R, m);$$

or on a (n° 116)

$$\frac{x^1\xi^4}{\eta^{1,4}} + \frac{x^4\xi^1}{\eta^{4,1}} = x_{23}^{14}(M\mathfrak{M});$$

donc (le théorème des quatre éléments étant vrai pour le polytrope

de référence)

$$\frac{x^1\xi^4 x_1}{h_1}+\frac{x^4\xi^1 x_1}{h^1}+\ldots=\xi^4(\mathrm{M}\mathfrak{M})(\mathrm{R},m);$$

en ajoutant $\frac{x^4\xi^4}{h_4}+\frac{x^4\xi^4}{h^4}$ qui est nul, le coefficient de x^4 est nul, et celui de ξ^4 est $(\mathrm{M}m)$; donc on a

$$(\mathrm{M}m)=(\mathrm{M}\mathfrak{M})(\mathrm{R}m).$$

[On vérifierait la formule relative au moment $\mathrm{M}_\pi \mathrm{M}_p$ (nº 128) en employant la formule du nº 118 au lieu de celle du nº 116.]

CHAPITRE VIII.

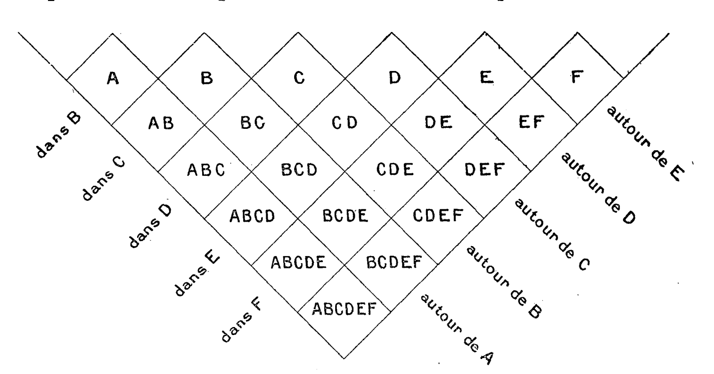
GÉOMÉTRIE AUTOUR DE M_α DANS M^β.

§ I.

134. Géométrie autour de M_α dans M^β. — On peut considérer la Géométrie autour d'un élément M_α, dans un élément M^β, le premier élément étant inscrit au second; les éléments $M_{\alpha+1}$ passant par M_α et situés dans M^β jouent le rôle du point en Géométrie générale, les éléments $M^{\beta+1}$ passant par M_α, etc., jouent le rôle du trope, et d'une manière générale on a les éléments suivants passant par M_α et situés dans M^β :

$$M_\alpha^{\beta+N} \mid M_{\alpha+1}^{\beta+(N-1)} \ldots M_{\alpha+P}^{\beta+Q} \ldots M_{\alpha+Q}^{\beta+P} \ldots M_{\alpha+(N-1)}^{\beta+1} \mid M_{\alpha+N}^{\beta};$$

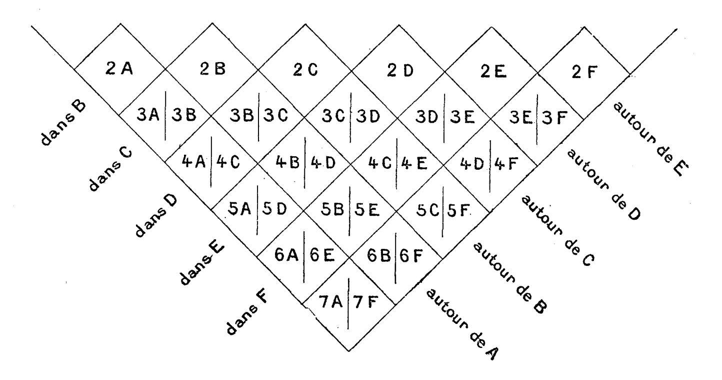
un élément $M_{\alpha+P}^{\beta+Q}$ et un élément $M_{\alpha+Q}^{\beta+P}$ sont associables dans la Géométrie que l'on considère. Le nombre N est défini par la relation $\alpha+\beta+N=n$, on a $P+Q=N$, et les choses se passent comme dans l'hyperespace d'indice N. On peut classer les différentes Géométries (α, β) dans un Tableau à double entrée; si l'on suppose $n=7$, et si l'on désigne les six éléments de l'hyperespace M_7 par les lettres A, B, C, D, E, F, on a le Tableau suivant, dans lequel on a indiqué les éléments de chaque Géométrie :



Les différentes Géométries placées dans une ligne horizontale

ont le même N, $\alpha+\beta$ étant le même; le nombre N surpasse d'une unité le nombre des éléments de la Géométrie considérée : il prend les valeurs 2, 3, 4, 5, 6, 7.

135. **Polytrope.** — Chaque Géométrie a un polytrope particulier. Pour la Géométrie autour de M_α, dans M^β, le polytrope est déterminé par N éléments $M_{\alpha+1}$ ou par N éléments $M^{\beta+1}$. Dans le Tableau suivant on a indiqué ces divers polytropes, en notant le nombre et la nature de leurs éléments ponctuels et de leurs éléments tangentiels :



136. **Moments.** — Autour de M_α, dans M^β, on appellera *moment* de deux éléments $M_{\alpha+P}^{\beta+Q}$, $M_{\alpha+H}^{\beta+K}$ le produit des Δ principaux en laissant de côté les racines nulles qui sont dues à la nature même de la Géométrie que l'on considère : c'est le moment réduit. En se bornant aux couples $M_{\alpha+P}^{\beta+Q}$, $M_{\alpha+Q}^{\beta+P}$, on voit par exemple que, dans le Tableau du n° 134, la colonne à gauche de celle du milieu (lue de bas en haut) donne lieu de considérer le moment de deux éléments A et E, le moment de deux éléments B et D dans les deux cas possibles, le moment de deux éléments C et C dans les trois cas possibles; le nombre des racines nulles négligées est alors le plus petit des deux indices α et β. On remarquera que ce Tableau donne ainsi une classification des moments de l'hyperespace M_n, comprenant tous les moments dans tous les cas possibles. Le moment des deux éléments M^β, M_α dont le premier passe par le second, doit être considéré comme égal à 1.

137. Comoments. — Le comoment de deux éléments $M_{\alpha+P}$ qui ont un M_α inscrit commun ne subit pas d'altération essentielle, la présence de l'élément inscrit M_α amenant simplement des facteurs 1 dans la valeur du comoment; il en est de même pour le comoment de deux éléments $M^{\beta+Q}$ qui ont un M^β circonscrit commun.

138. Fonctions ponctuelles et tangentielles. — La fonction ponctuelle de P éléments $M_{\alpha+1}$ ayant un M_α inscrit commun est une quantité dont le carré est le déterminant des comoments de ces éléments pris deux à deux; de même, la fonction tangentielle de P éléments $M^{\beta+1}$ ayant un M^β circonscrit commun etc. En particulier, dans chaque Géométrie on peut faire $P = N$, c'est-à-dire considérer la fonction ponctuelle et la fonction tangentielle du polytrope de cette Géométrie : ces fonctions sont indiquées par le Tableau du n° 135; et l'on doit remarquer que l'on obtient ainsi toutes les fonctions ponctuelles et toutes les fonctions tangentielles : car si l'on prend, par exemple, P éléments $M_{\alpha+1}$ ayant un M_α inscrit commun, ils déterminent un élément $M_{\alpha+P}$ ou M^β en posant $\alpha + \beta + P = n$, et forment le polytrope de la Géométrie autour de M_α dans M^β, Géométrie dont le N est égal au nombre P des éléments considérés. Il suit de là que le Tableau du n° 135 donne une classification des fonctions ponctuelles et des fonctions tangentielles dans l'hyperespace M_n; en partant de la rangée supérieure, pour descendre vers la gauche et vers la droite, on voit que le nombre des fonctions relatives à des éléments C, par exemple, est égal à $(n-1)$, les unes étant des fonctions ponctuelles et les autres des fonctions tangentielles; d'où il suit que le nombre total de ces fonctions est $(n-1)^2$.

139. C'est ici le lieu de faire observer que chaque Géométrie comprend toutes celles que donne le Tableau réduit dont elle forme la base. Si l'on considère, en particulier, les différentes Géométries placées sur les bords du Tableau, à droite et à gauche, et si l'on se reporte au second Tableau, on voit que :

Dans la Géométrie autour d'un élément B par exemple, on aura à considérer les fonctions ponctuelles 5C, 4C, 3C, 2C; pour la Géométrie dans un élément D, on aura à considérer les fonc-

tions tangentielles 4C, 3C, 2C, cette dernière étant identique à la fonction ponctuelle 2C qui est d'ailleurs un moment réduit; en sorte que l'étude des différentes Géométries placées sur les bords du Tableau offre une importance particulière.

En Géométrie générale, on a rencontré des formules ponctuelles de Géométrie dans M^β, parce qu'on a étudié un système de points; de même, etc.

140. **Théorème des déterminants de δ, etc.** — Le moment de deux éléments $M_{\alpha+1}$, $M^{\beta+1}$ sera leur δ. Si l'on considère autour de M_α dans M^β des éléments $M_{\alpha+1}$ en nombre P et des éléments $M^{\beta+1}$ en même nombre, on aura un théorème des déterminants de δ analogue au théorème des déterminants de Δ, et donnant une propriété du moment réduit. On remarquera le cas $P = N$.

On aura, pour le moment de deux éléments $M_{\alpha+P}$, $M^{\beta+P}$, une seconde propriété analogue à celle du n° 56; elle a été démontrée au n° 108 pour le cas $\alpha = 0$, et pour le cas $\beta = 0$. Nous rappellerons, à ce propos, les formules des n°s 9 et 118 qui définissent les moments réduits; lorsqu'il n'y a pas d'indice h, ou d'indice f, on a la propriété du n° 108; dans le cas général, elles sont équivalentes à des formules de Géométrie dans M^β autour de M_α.

141. **Pseudo-écart; paramètre.** — Dans l'espace réel on considère la distance de deux points, l'angle de deux droites qui se coupent, le dièdre de deux plans. Dans l'hyperespace, pour l'étude de la corrélation, on a considéré la pseudo-distance de deux points, le pseudo-angle de deux tropes; on a à considérer maintenant d'autres quantités, comparables à l'angle de deux droites qui se coupent. Reprenons le Tableau du n° 134 et considérons la première ligne de ce Tableau, pour laquelle $N = 2$, en modifiant la notation : si l'on prend deux éléments M_p^q, ayant un M_{p-1}^{q+1} inscrit commun, et, par suite, un M_{p+1}^{q-1} circonscrit commun, on pourra définir leur pseudo-écart; on aura ainsi des quantités de différentes espèces en nombre $n-1$, parmi lesquelles seront la pseudo-distance de deux points, le pseudo-angle de deux tropes. Si l'on considère alors, toujours pour la première ligne du Tableau, les éléments M_p^q qui passent par un élément M_{p-1}^{q+1} et sont dans un élément M_{p+1}^{q-1} circonscrit au premier, on pourra définir le para-

mètre du système formé par un élément M_{p-1}^{q+1} et un élément M_{p+1}^{q-1} dont le second est circonscrit au premier; on aura ainsi des quantités de différentes espèces, en nombre $n-1$, parmi lesquelles seront le paramètre d'un rayon et le paramètre d'un axe; dans l'espace réel, on aurait par exemple trois sortes de paramètres : le paramètre d'un rayon, le paramètre d'un point dans un plan (relatif aux droites menées par le point dans le plan), le paramètre d'un axe.

Maintenant, en Géométrie autour de M_{p-1}^{q+1}, dans $M_{\pi+1}^{\varkappa-1}$, les éléments extrêmes étant M_p^q $M_\pi^\varkappa$, deux éléments M_p^q auront un pseudo-écart, deux éléments $M_\pi^\varkappa$ auront un pseudo-écart; un élément M_{p+1}^{q-1} aura un paramètre qui sera le paramètre du système $M_{p-1}^{q+1}M_{p+1}^{q-1}$ (le premier élément étant l'élément fixe autour duquel les figures sont construites), un élément $M_{\pi-1}^{\varkappa+1}$ aura un paramètre qui sera le paramètre du système $M_{\pi-1}^{\varkappa+1}M_{\pi+1}^{\varkappa-1}$. Par exemple, en Géométrie autour de A dans F, les éléments extrêmes étant B et E, deux éléments B auront un pseudo-écart, deux éléments E auront un pseudo-écart; un élément C aura un paramètre qui sera le paramètre du système A, C (case B de la première rangée), un élément D aura un paramètre qui sera le paramètre du système D, F (case E de la première rangée).

[En suivant l'idée indiquée au n° 90 on a ceci : dans un élément M^β, autour d'un élément M_α, il y a un paramètre ponctuel pour les éléments $M_{\alpha+1}$ passant par M_α et situés dans M^β, et un paramètre tangentiel pour les éléments $M^{\beta+1}$ situés dans M^β et passant par M_α.

Par exemple, étant donnée une corrélation dans l'espace réel :

1° Un rayon a un paramètre; un point dans un plan donne lieu à un paramètre; un axe a un paramètre. On peut dire qu'une droite a un paramètre ponctuel et un paramètre tangentiel. On a ainsi les paramètres θ indiqués au début de ce numéro.

2° Un plan a un paramètre ponctuel et un paramètre tangentiel selon qu'on y considère des systèmes de trois points ou des systèmes de trois droites. Un point de l'espace a un paramètre ponctuel et un paramètre tangentiel selon que l'on considère des triodes ou des trièdres; j'appelle *triode* un système de trois droites concourantes dans l'espace.

3° L'espace M_4^0 a un paramètre ponctuel, l'élément fictif M_0^4 a un paramètre tangentiel].

142. Géométries de même indice N. — Les différentes Géométries placées dans une même ligne horizontale, et pour lesquelles N a la même valeur, donnent lieu aux mêmes formules et peuvent être intimement rattachées. Nous poserons $\alpha + \beta = \nu$, en sorte que les nombres ν et N sont complémentaires par rapport à n. On fera une figure schématique formée d'un dièdre $M^1 M_{\nu+1}$, d'arête M_ν; une droite M^ν rencontre les faces en $M^{\nu+1}$ et M_1, et sur cette droite est un point N_1; un point M_α de l'arête détermine avec M^ν un plan M^β qui coupe les faces du dièdre suivant les droites $M^{\beta+1} M_{\alpha+1}$.

Prenons un élément M_ν et l'élément transformé M^ν; en Géométrie autour de M_ν on a des éléments ponctuels $M_{\nu+1}$ et des éléments tangentiels qui sont des tropes M^1; en Géométrie dans l'élément M^ν on a des points M_1 et des éléments tangentiels $M^{\nu+1}$; d'ailleurs, les éléments $M_{\nu+1}$ et M^1 autour de M_ν déterminent par intersection des éléments correspondants M_1 et $M^{\nu+1}$ dans M^ν. Plus généralement, soit M_α un élément inscrit dans M_ν : cet élément et l'élément M^ν déterminent un élément M^β circonscrit ($\alpha + \beta = \nu$); la Géométrie autour de M_α, dans M^β, a des éléments ponctuels $M_{\alpha+1}$ et des éléments tangentiels $M^{\beta+1}$, que l'on peut rattacher soit aux éléments $M_{\nu+1}$ M^1 de la Géométrie autour de M_ν, soit aux éléments M_1 $M^{\nu+1}$ de la Géométrie dans M^ν. D'ailleurs, les deux éléments M_α et M^β sont quelconques (le second étant naturellement circonscrit au premier); car, si l'on se donne M_α et M^β, ce dernier a un primitif M_β qui avec M_α détermine un élément M_ν : et le transformé M^ν passe alors par M^β.

Cela posé, en Géométrie autour de M_α, dans M^β, les éléments qui remplacent le point et le trope sont les éléments $M_{\alpha+1}$ et les éléments $M^{\beta+1}$: ils ont M_α inscrit commun, M^β circonscrit commun, et leur moment réduit est un Δ unique que l'on peut appeler leur δ : je dis que, pour un point M_1 et un trope M^1 donnés, ce δ est indépendant de l'élément M_α et même de la valeur de α; il est égal au Δ du point M_1 et du trope M^1. En effet, pour avoir le δ des deux éléments $M_{\alpha+1}$ $M^{\beta+1}$, il faut considérer les éléments transformés $M^{\alpha+1}$ $M_{\beta+1}$, prendre le rayon qui rencontre les quatre éléments, et le σ des deux points d'appui sur $M_{\alpha+1}$ et $M^{\beta+1}$. Or, le point transformé du trope M^1 étant N_1, ce rayon est $M_1 N_1$: il rencontre $M_{\alpha+1}$ et $M^{\beta+1}$; il rencontre aussi $M_{\beta+1}$ qui passe par N_1; il rencontre enfin $M^{\alpha+1}$, car tous deux sont dans l'élément M^α trans-

formé de M_α, et si l'on forme le Tableau

$$M_0\,M_1\,M_2\ldots M^{\alpha+1}\,M^\alpha,$$

on voit que les deux éléments $M_2\,M^{\alpha+1}$ ayant l'élément M^α circonscrit commun ont un point M_1 commun. Le rayon M_1N_1 étant identique à celui qui donne le Δ du point M_1 et du trope M^1, le fait annoncé se trouve démontré.

Si l'on fait $\alpha = 0$, on voit que le moment du point M_1 et de l'élément $M^{\nu+1}$ est égal au Δ du point M_1 et du trope M^1; cela rentre dans la formule

$$(M_1.M^1) = (M_1.M^{\nu+1})(M^\nu.M^1),$$

ce dernier moment étant égal à 1 parce que l'élément M^ν passe au point N_1. Pour $\beta = 0$ on a un résultat analogue. Au début du Chap. VII on a obtenu le cas particulier $\nu = n - 2$ ou $N = 2$ avec $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

143. On vient de considérer le δ des deux éléments $M_{\alpha+1}\,M^{\beta+1}$; car deux éléments sont de même espèce lorsqu'on a

$$\alpha + 1 + \beta + 1 = n,$$

c'est-à-dire $\nu = n - 2$ ou $N = 2$. L'élément M_ν est alors un axe, son transformé est un rayon; et l'on a (première ligne du Tableau 134, avec les notations du n° 140) deux éléments $M_p^q\,\mathfrak{M}_p^q$ ayant un M_{p-1}^{q+1} inscrit commun, un élément M_{p+1}^{q-1} circonscrit commun. Pour $p = 1$ on a deux points M et $\mathfrak{M}$ sur le rayon, pour $q = 1$ on a les deux tropes m et μ qui passent par l'axe et par les points M et $\mathfrak{M}$; et l'on a vu au n° 98 comment le σ des deux points est égal au Σ des deux tropes, parce que le rapport anharmonique $M\mathfrak{M}\Omega\Omega'$ est égal au rapport anharmonique $m\mu\omega\omega'$. En général, prenons dans l'axe un élément M_{p-1}, et considérons les deux éléments $M_p\,\mathfrak{M}_p$ définis par l'élément précédent et par les deux points M et $\mathfrak{M}$: il est facile de voir comment le moment de ces deux éléments est égal au moment des points M et $\mathfrak{M}$. L'élément $M_{p-1}\Omega$ est un élément M_p conjugué de lui-même, car il est dans ω et passe par Ω, d'où il résulte que son transformé passe par Ω et est dans ω de manière à lui être associé; il en est de même de l'élément $M_{p-1}\Omega'$; et l'on a un rapport anharmonique égal au rapport anharmonique $M\mathfrak{M}\Omega\Omega'$; etc.

On peut suivre le raisonnement sur une figure schématique formée de quatre plans $\omega m \mu \omega'$ passant par une droite A; une droite R coupe ces plans en $\Omega M \mathfrak{M} \Omega'$; un point M_{p-1} de A détermine avec R un plan M^{p-1} qui coupe les quatre plans, en particulier m et μ suivant M_p et $\mathfrak{M}_p$.

144. Étant donnés les deux éléments $M_\alpha M^\beta$ dont le premier est inscrit au second, la Géométrie autour de M_α dans M^β peut se ramener à la Géométrie dans N^α autour de N_β, ces éléments étant les transformées des deux premiers, et cela de deux manières différentes : on peut d'abord considérer les figures transformées des premières; on peut aussi couper les premières figures par N^α, et joindre les figures obtenues à N_β. On a un exemple dans ce fait que l'angle de deux grands cercles sur la sphère a même mesure que l'arc de grand cercle qui joint leurs pôles, ou encore même mesure que l'arc de grand cercle compris entre eux et dont les pôles sont à leurs points d'intersection.

145. **Figure de référence.** — Pour étudier la Géométrie autour d'un élément M_α dans un élément M^β, on prendrait dans la figure de référence un élément M^α et un élément M_β, le premier défini par les tropes d'indices FG, le second défini par les points d'indices HG. On pourrait supposer, au moins au début, $\theta = 0$, c'est-à-dire supprimer les indices communs G : de cette façon, l'élément de référence M^α passerait par M_β, et la figure de référence serait un polytrope de la Géométrie corrélative de celle que l'on étudie (un triangle pour la géométrie conique dans l'espace réel). On aurait pour le moment réduit la formule du n° 118, etc.; on considérerait d'abord le δ de deux éléments $M_{\alpha+1}$, $M^{\beta+1}$; on démontrerait le théorème des déterminants de δ; etc.

146. **Les éléments M_α et M^β sont dirigés.** — Il est bien entendu que les éléments M_α et M^β sont dirigés; par exemple, pour le théorème des quatre éléments, dans la formule

$$(M_{\alpha+Q}^{\beta+P}, M_{\alpha+P}^{\beta+Q}) = (M_{\alpha+Q}^{\beta+P}, M_{\alpha+\gamma}^{\beta+Q+\delta})(M_{\alpha+\gamma+Q}^{\beta+\delta}, M_{\alpha+P}^{\beta+Q}),$$

où l'on suppose $\gamma + \delta = P$, le premier moment est un moment autour de M_α dirigé dans M^β dirigé, le second moment est un moment autour de M_α dirigé dans $M^{\beta+\delta}$ dirigé, etc.



§ II.

Je donnerai dans ce paragraphe un théorème remarquable, concernant des éléments $M_{\alpha+1}$ qui ont un élément M_α inscrit commun, et des éléments $M^{\alpha+1}$ en même nombre qui ont un élément M^α circonscrit commun; on pourra, dans l'énoncé de ce théorème, introduire un nombre β défini par la relation

$$\alpha + \beta + N = n,$$

N étant le nombre des éléments considérés : mais ici les deux nombres α et β ne joueront plus le même rôle. Le théorème se rattache à la fonction ponctuelle du polytrope de la Géométrie autour de M_α dans M^β, et à la fonction tangentielle du polytrope de la Géométrie dans M^α autour de M_β.

Ce théorème, qui se déduit du théorème des déterminants de δ, donne lieu à un corollaire relatif au cas où le déterminant que l'on considère est égal à zéro; je donnerai d'abord ce corollaire en le démontrant directement.

147. Composition d'éléments $M_{\alpha+1}$ ayant M_α inscrit commun, d'éléments $M^{\alpha+1}$ ayant M^α circonscrit commun. — Soit un élément fixe M_α; les éléments ponctuels de la Géométrie autour de M_α sont des éléments $M_{\alpha+1}$, les éléments tangentiels sont des tropes : on peut composer des éléments $M_{\alpha+1}$, et obtenir un théorème des moments par rapport à un trope analogue au théorème des Δ pour la composition des points en Géométrie générale.

[Je ferai en passant la remarque suivante qui généralise un théorème de Mécanique dû à Leibnitz. Soient deux points $M_{\prime}$ $M_{\prime\prime}$ affectés de coefficients $k_{\prime} k_{\prime\prime}$ et M leur point résultant avec le coefficient k; considérons un élément M_α, et les éléments $M_{\alpha+1}$ qui passent par M_α et par les points $M_{\prime} M_{\prime\prime} M$ respectivement : je dis que les deux éléments $M_\alpha M_{\prime}$ et $M_\alpha M_{\prime\prime}$ affectés des coefficients $k_{\prime} \times (M_\alpha . M_{\prime})$ et $k_{\prime\prime} \times (M_\alpha . M_{\prime\prime})$ ont pour élément résultant l'élément $M_\alpha M$ affecté du coefficient $k \times (M_\alpha . M)$. En effet, on a par hypothèse

$$\frac{(M_{\prime} M)}{k} = \frac{(M M_{\prime\prime})}{k} = \frac{(M_{\prime} M_{\prime\prime})}{k};$$

or, d'après la relation établie à la fin du n° 151, on a

$$(M_\alpha.M_,)(M_\alpha.M) \times (M_\alpha M_,.M_\alpha M) = (M_,.M) \times (M_\alpha.M_,M),$$

et des relations analogues; on peut donc, dans les rapports précédents, remplacer les numérateurs par les quantités $\frac{(M_\alpha M_,.M_\alpha M)}{(M_\alpha.M_{,,})}\cdots$; ce qui démontre le fait annoncé. On peut alors, au lieu de deux points, en considérer un nombre quelconque. Si l'on prend maintenant un trope passant par M_α, et qu'on écrive le théorème des moments pour les points considérés par rapport au trope, en évaluant les Δ au moyen du théorème des quatre éléments, on obtient le théorème des moments pour les éléments $M_{\alpha+1}$ par rapport à un trope.]

Le théorème des moments par rapport à un trope passant par M_α peut être transformé, et l'on obtient un théorème des moments par rapport à un élément $M^{\alpha+1}$ tout à fait quelconque. En effet, l'élément M_α et un élément $M^{\alpha+1}_{n-\alpha-1}$ déterminent un trope M_{n-1}, et le moment de cet élément et d'un élément $M_{\alpha+1}$ passant par M_α est proportionnel, d'après le théorème des quatre éléments, au moment de l'élément $M_{\alpha+1}$ et du trope. On aura une idée juste de ce théorème, en le comparant au théorème des moments par rapport à un axe tout à fait quelconque pour des forces concourantes et leur résultante. Si l'on désigne par $x_, x_{,,}\ldots$ les coordonnées des éléments composants pour un élément de référence $M^{\alpha+1}$, la coordonnée x de l'élément résultant est donnée par la formule

$$kx = k_, x_, + k_{,,} x_{,,} + \ldots.$$

Soit de même un élément fixe M^α : on peut composer des éléments $M^{\alpha+1}$ situés dans cet élément fixe, etc.

[Si l'on considère plusieurs rayons issus d'un même point O, avec des coefficients $K_, K_{,,}\ldots$, on aura un rayon résultant issu de O avec un coefficient K. D'après la formule du n° 79, le paramètre θ du rayon résultant sera lié aux paramètres $\theta'\theta''\ldots$ des rayons composants par la formule

$$K\cos\theta = K'\cos\theta' + K''\cos\theta'' + \ldots.$$

On peut retrouver cette formule comme il suit. Étant donné un point O, et des points $M_, M_{,,}\ldots$ affectés de coefficients $k_, k_{,,}\ldots$ avec



le point résultant M affecté du coefficient k, en retranchant les deux formules du n° 42 et en tenant compte de la formule du n° 79, on a

$$k\sigma(\text{OM})\cos\theta = k_{\prime}\sigma(\text{OM}_{\prime})\cos\theta' + \ldots,$$

et, d'après une remarque faite plus haut, cette formule équivaut à la formule ci-dessus.

Dans le cas de deux rayons composants $\text{OM}_{\prime}, \text{OM}_{\prime\prime}$ déterminant un élément M_3, on peut supposer qu'il s'agit de Géométrie plane, et comme alors (n° 87) le cosinus du paramètre est proportionnel au Δ d'un point fixe F et du rayon, la formule ci-dessus n'est autre chose que le théorème des Δ].

148. **Déterminants nuls.** — Prenons P éléments $M_{\alpha+1}$ ayant un M_α inscrit commun, P éléments $M^{\alpha+1}$ ayant un M^α circonscrit commun, et formons le déterminant des moments des premiers avec les seconds.

Pour $P = (n - \alpha) + 1$, le déterminant est nul.

Pour $P = (n - \alpha)$, le déterminant est nul si les $(n - \alpha)$ éléments $M_{\alpha+1}$ sont dans un même trope, ou si les $(n - \alpha)$ éléments $M^{\alpha+1}$ passent par un même point.

Pour $P < (n - \alpha)$, le déterminant est nul si les P éléments $M_{\alpha+1}$ appartiennent à un élément $M_{\alpha+P-1}$, ou si les P éléments $M^{\alpha+1}$ passent par un élément $M^{\alpha+P-1}$, et plus généralement si les deux éléments $M_{\alpha+P}$ et $M^{\alpha+P}$ déterminés par les deux groupes d'éléments sont associés.

En outre, le déterminant est nul si les deux éléments M_α et M^α sont associés; car alors il existe un élément $M_{\alpha+1}$ qui est associé à tous les éléments $M^{\alpha+1}$ donnés, etc.

Pour $P = 2$, on peut dire : Étant donnés deux éléments M_p^q ayant M_{p-1} inscrit commun et par suite M^{q-1} circonscrit commun, et deux éléments M_q^p ayant M^{p-1} circonscrit commun et par suite M_{q-1} inscrit commun, le déterminant des moments de ces deux couples d'éléments est égal à zéro lorsque l'élément inscrit à l'un et l'élément circonscrit à l'autre sont associés. On aurait une figure schématique en considérant deux angles dans l'espace réel.

149. Avec d'autres notations, en remplaçant P par N, et défi-

nissant β par la relation $\alpha + \beta + N = n$, on peut dire : Étant donnés N éléments $M_{\alpha+1}$ passant par un élément M_α et qui déterminent un élément $M_{\alpha+N}$ ou M^β, et N éléments $M^{\alpha+1}$ situés dans un élément M^α et qui déterminent un élément $M^{\alpha+N}$ ou M_β, le déterminant des moments est nul si les deux éléments M^β et M_β sont associés ; il est encore nul si les deux éléments M_α et M^α sont associés (mais il ne faut pas croire que α et β jouent ici le même rôle, sauf dans le cas $N = 2$).

Si l'on a $N + 1$ éléments $M_{\alpha+1}$ passant par un élément M_α, et $N + 1$ éléments $M^{\alpha+1}$ situés dans un élément M^α, le déterminant des moments est encore nul si les $N + 1$ premiers éléments appartiennent à un élément $M_{\alpha+N}$ ou M^β, ou si les $N + 1$ derniers éléments passent par un élément $M^{\alpha+N}$ ou M_β.

150. Théorème des déterminants de moments. — On a le théorème suivant auquel on peut donner le nom de *théorème des déterminants de moments*, et qui se déduit du théorème des déterminants de δ ; pour $\alpha = 0$, on a le théorème des déterminants de Δ :

Étant donnés P *éléments* $M_{\alpha+1}$ *ayant* M_α *inscrit commun, et* P *éléments* $M^{\alpha+1}$ *ayant* M^α *circonscrit commun* ($P \leqq n - \alpha$), *le déterminant des moments des premiers avec les seconds a pour valeur le produit de la fonction ponctuelle des* P *premiers éléments par la fonction tangentielle des* P *derniers, multiplié par le moment des deux éléments* $M_{\alpha+P}$ *et* $M^{\alpha+P}$ *qu'ils déterminent, multiplié encore par la puissance* $(P - 1)^{ième}$ *du moment des deux éléments* M_α *et* M^α.

Si l'on met les éléments $M^{\alpha+1}$ les premiers, le théorème reste exact avec le signe, en plaçant également $M^{\alpha+P}$ avant $M_{\alpha+P}$ et M^α avant M_α.

Pour $P = 2$, le théorème peut s'énoncer ainsi :

Étant donnés deux éléments M_p^q *ayant* M_{p-1} *inscrit commun et par suite* M^{q-1} *circonscrit commun (première rangée du Tableau 134), deux éléments* M_q^p *ayant* M^{p-1} *circonscrit commun et par suite* M_{q-1} *inscrit commun, le déterminant des moments de ces deux couples d'éléments a pour valeur le produit du moment réduit des deux premiers par le moment réduit des*

deux derniers, multiplié par le moment des deux éléments $M_{p-1}M^{p-1}$ *et par le moment des deux éléments* $M^{q-1}M_{q-1}$.

On a une figure schématique en considérant deux angles dans l'espace réel.

151. Ce théorème se ramène au théorème des déterminants de δ pour la Géométrie dans M^α. On veut démontrer la relation

$$[(M'_{\alpha+1}.M_{,}^{\alpha+1})] = \sigma.\Sigma.(M_{\alpha+P}.M^{\alpha+P})(M_\alpha.M^\alpha)^{P-1},$$

les crochets indiquant un déterminant.

On fera cette figure schématique : dans un plan M^α sont deux droites $M_{,}^{\alpha+1}M_{,,}^{\alpha+1}$ se coupant en $M^{\alpha+P}$; d'un point extérieur M_α partent deux droites $M'_{\alpha+1}M''_{\alpha+1}$ déterminant un plan $M_{\alpha+P}$: elles coupent le plan M^α en $m'm''$ et leur plan coupe M^α suivant m_P; le reste est en pointillé : du point M_α on mène la perpendiculaire au plan M^α, de son pied on mène la perpendiculaire à m_P, et l'on joint le pied de cette perpendiculaire au point M_α; on fait de même pour le point $M^{\alpha+P}$, le plan $M_{\alpha+P}$, la droite m_P.

Coupons les éléments $M'_{\alpha+1}\ldots$ issus de M_α par l'élément M^α qui contient les éléments $M^{\alpha+1}$, et désignons par $m'\ldots$ les points d'intersection; nous aurons, d'après le théorème des 4 éléments :

$$(M'_{\alpha+1}.M_{,}^{\alpha+1}) = (M'_{\alpha+1}.M^\alpha)(m'.M_{,}^{\alpha+1}) = \frac{(M_\alpha.M^\alpha)}{(M_\alpha.m')}(m'.M_{,}^{\alpha+1}),$$

et aussi

$$(M_{\alpha+P}.M^{\alpha+P}) = (M_{\alpha+P}.M^\alpha)(m_P.M^{\alpha+P}) = \frac{(M_\alpha.M^\alpha)}{(M_\alpha.m_P)}(m_P.M^{\alpha+P}),$$

en appelant m_P l'élément défini par les P points m. La relation à démontrer devient

$$\frac{1}{(M_\alpha.m')(M_\alpha.m'')\ldots}[(m'.M_{,}^{\alpha+1})] = \sigma.\Sigma.\frac{(m_P.M^{\alpha+P})}{(M_\alpha.m_P)},$$

ou, d'après le théorème des déterminants de δ pour les P points m et les P éléments $M^{\alpha+1}$, dans M^α,

$$(M_\alpha.m')(M_\alpha.m'')\ldots\times\sigma = \sigma'\times(M_\alpha.m_P),$$

en désignant par σ' la fonction ponctuelle des P points m.

C'est donc cette dernière relation qu'il faut établir. Or, le second membre est le moment du système d'éléments $M_\alpha m' m'' \ldots$ (n° 112), ou le moment du système d'éléments $m' m'' \ldots m^{(P)} M_\alpha$ multiplié par $(-1)^{P(\alpha+1)}$, ou enfin, pour plus de commodité, le moment du système d'éléments $m^{(P)} \ldots m'' m' . M_\alpha$ multiplié par ε en posant $\varepsilon = (-1)^{P(\alpha+1)} \times (-1)^{\frac{P(P-1)}{2}}$; c'est donc

$$\varepsilon.(m'.M_\alpha) \times (m''.M_\alpha m') \times (m'''.M_\alpha m' m'') \times \ldots,$$

ou bien

$$\varepsilon.(m'.M_\alpha) \times (m''.M_\alpha)(M_\alpha m''.M_\alpha m') \times (m''' M_\alpha)(M_\alpha m'''.M_\alpha m' m'') \times \ldots,$$

ou enfin

$$(M_\alpha . m')(M_\alpha . m'')(M_\alpha . m''') \ldots \times \sigma$$

c'est-à-dire le premier membre de la relation, qui est ainsi démontrée.

On aurait une démonstration corrélative.

152. La relation que l'on vient d'obtenir est d'ailleurs intéressante par elle-même. Lorsque l'élément M_α est un point m, on a la formule

$$(m.m'.m'' \ldots) = (m.m')(m.m'') \ldots \times \sigma,$$

σ étant la fonction ponctuelle du système de rayons mm', mm'', etc.; c'est ainsi que, en Géométrie ordinaire, le sextuple du volume d'un tétraèdre ABCD est égal au produit des arêtes AB, AC, AD par le sinus du trièdre A. On aurait une formule corrélative.

[J'indiquerai en passant la formule suivante. Dans le polytrope de référence, la formule $h' \ldots h^n = s_0 S_0$ donne

$$s_0^{n-2} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} s_1 s_2 \ldots s_{n-1} . S_n;$$

c'est ainsi qu'on peut avoir le carré du volume sextuplé d'un tétraèdre en fonction des aires doublées des trois faces qui ont un sommet en D et du sinus du trièdre supplémentaire du trièdre D. On aurait une formule corrélative.]

En général, si l'on prend α points $A_1 A_2 \ldots A_\alpha$ dans M_α, en multipliant les deux membres de la relation par la fonction ponctuelle de ces points, le second membre devient égal à la fonc-

tion ponctuelle des $\alpha + p$ points A et m, et l'on a la formule

$$(A_1.A_2\ldots A_\alpha.m'.m''\ldots)$$
$$= (A_1.A_2\ldots A_\alpha) \times (M_\alpha.m')(M_\alpha.m'')\ldots \times (M'_{\alpha+1}.M''_{\alpha+1}\ldots).$$

Par exemple, dans un tétraèdre $A_1A_2m'm''$, on a

$$6V = (A_1.A_2)(A_1A_2.m')(A_1A_2.m'')\sin(A_1A_2m', A_1A_2m'').$$

On peut donner une autre forme au résultat précédent et écrire

$$(A_1.A_2\ldots A_\alpha.m'.m''\ldots)$$
$$= \frac{(A_1.A_2\ldots A_\alpha.m')(A_1.A_2\ldots A_\alpha.m'')\ldots}{(A_1.A_2\ldots A_\alpha)^{p-1}} \times (M'_{\alpha+1}.M''_{\alpha+1}\ldots).$$

Quand il y a seulement deux points m' et m'', cette formule rentre dans une formule relative au moment réduit de deux éléments; on a, par exemple, pour un tétraèdre

$$6V = \frac{2(A_1.A_2.m') \times 2(A_1A_2m'')}{(A_1.A_2)} \times \sin(A_1A_2m'.A_1A_2m'').$$

Lorsque l'élément M_α est un point m, la formule que l'on vient d'écrire ne diffère pas de la première.

On aurait des formules corrélatives.

153. La formule donnée à la fin du n° 151 permet de ramener le théorème des déterminants de Δ pour p points et p tropes au théorème des déterminants de δ pour p éléments M_{q+1} et p tropes M^1 autour d'un élément M_q : cette réduction offre un certain intérêt, parce que le théorème auquel on ramène l'autre joue pour la Géométrie autour de M_q le rôle du théorème des déterminants de Δ pour n points et n tropes en Géométrie générale. Désignons les points par A, B, C, ..., les tropes par a, b, c, ...; soit M_p l'élément déterminé par les points, M^p l'élément déterminé par les tropes; on veut démontrer la relation

$$[(a, A)] = (a.b.c\ldots)(A.B.C\ldots)(M_p.M_p).$$

Si l'on désigne par α, β, γ, ... les éléments M^p_{q+1} définis par l'élément M^p_q et les points A, B, C, ..., on a, par le théorème des quatre éléments,

$$(a, A) = (a, \alpha)(M^p_q, A),$$

et le premier membre de la relation devient

$$[(a,\alpha)]\times(M_q^p, A)(M_q^p, B)\ldots,$$

ou, en tenant compte du théorème des déterminants de δ pour p tropes et p éléments M_{q+1} en Géométrie autour de M_q^p,

$$(a.b.c\ldots)(\alpha.\beta.\gamma\ldots)\times(M_q^p, A)(M_q^p, B)\ldots;$$

cette quantité sera égale au second membre de la relation si l'on a

$$(\alpha.\beta.\gamma\ldots)(M_q^p, A)(M_q^p, B)\ldots=(A.B.C\ldots)(M^p, M_p)$$

Or cette relation n'est autre chose que la relation du n° 151, pour $P=p$ et $\alpha=q$.

En particulier, la formule relative au produit $h'h''\ldots h^{(p)}$ dans un polytrope se ramène à la formule qui joue, en Géométrie, autour de M_q, le rôle de la formule relative au produit $h^1h^2\ldots h^n$; et l'on peut dire que la formule du n° 151 est équivalente à la formule relative au produit $h'h''\ldots h^{(p)}$.

Au lieu de ramener le théorème des déterminants de Δ pour p points et p tropes au théorème des déterminants de δ pour p éléments M_{q+1} et p tropes M^1 autour de M_q, on pourrait le ramener au théorème des déterminants de δ pour p points et p éléments M^{p+1} dans M^p.

154. On peut démontrer le théorème des déterminants de moments par un calcul dont je donnerai une idée. On définit l'élément M_α par α points, et l'on donne un point pour définir chacun des éléments $M_{\alpha+1}$, de sorte qu'on a $\alpha+P$ points; on a de même $\alpha+P$ tropes en considérant l'élément M^α, etc.; on applique le théorème des déterminants de Δ; on transforme le déterminant d'ordre $\alpha+P$ par des combinaisons de colonnes de manière à faire apparaître des zéros en nombre αP distribués dans un rectangle de dimensions α et P, ce qui met en évidence le produit d'un déterminant d'ordre α par un déterminant d'ordre P, les termes de ce dernier étant d'ailleurs des déterminants. Alors, pour que le théorème soit démontré, il reste à démontrer la relation du n° 151 et la relation corrélative.

155. On peut énoncer le théorème des déterminants de mo-



ments avec la notation du n° 149, en remplaçant P par N et définissant β par la relation $\alpha + \beta + N = n$:

Étant donnés N éléments $M_{\alpha+1}$ ayant M_α inscrit commun, et des N éléments $M^{\alpha+1}$ ayant M^α circonscrit commun, le déterminant des moments des premiers avec les seconds a pour valeur le produit de la fonction ponctuelle des N premiers éléments par la fonction tangentielle des N derniers, multiplié par le moment des deux éléments M^β et M_β qu'ils déterminent, multiplié encore par la puissance $(N-1)^{\text{ième}}$ du moment des deux éléments M_α et M^α.

On peut alors classer les différents cas qui résultent de la valeur de α et de la valeur de N d'après le Tableau du n° 134; il faut seulement observer que les deux nombres α et β jouent ici des rôles bien différents. Par exemple, en reprenant l'hypothèse $n = 7$, soient quatre rayons B passant par un point A, et quatre axes E situés dans un trope F (*voir* le Tableau du n° 135, et remarquer que le système 4B est un système ponctuel autour de A tandis que le système 4E est un système tangentiel dans F) : le déterminant des moments a pour valeur le produit de la fonction ponctuelle des quatre éléments B par la fonction tangentielle des quatre éléments E, multiplié par le moment des deux éléments E et B qu'ils déterminent, multiplié par le cube du moment des deux éléments A et F. Dans cet exemple, la case du Tableau du n° 135 qui contient le système ponctuel 4B est à gauche de celle qui contient le système tangentiel 4E; le contraire peut avoir lieu.

156. **Cas** $\beta = 0$. — Prenons le cas $P = n - \alpha$ ou $N = n - \alpha$, ce qui revient à faire $\beta = 0$ dans la notation précédente. Pour donner un exemple, si nous supposons $n = 7$, en faisant $N = 5$, nous aurons à considérer cinq éléments C autour d'un rayon B, et cinq éléments D dans un axe E (*voir* le Tableau du n° 135); on remarque ici que, en Géométrie autour de B, le polytrope peut être défini par cinq tropes F déterminant, quatre à quatre, cinq éléments C qui sont les éléments ponctuels du polytrope : la fonction tangentielle est connue, et l'on va rencontrer la fonction ponctuelle; de même, en Géométrie dans E, le polytrope peut être défini par cinq points A déterminant, quatre à quatre, cinq éléments D qui sont les éléments tangentiels du polytrope : la fonction ponctuelle est connue, et l'on va rencontrer la fonction

tangentielle. D'une manière générale, autour d'un élément M_α, le polytrope peut être défini par N tropes déterminant N éléments $M^{N-1}_{\alpha+1}$ qui sont ses éléments ponctuels, et dont chacun est l'intersection de $N-1$ de ces tropes; de même, dans un élément M^α, le polytrope peut être défini par N points déterminant N éléments $M^{\alpha+1}_{N-1}$. Alors, dans le théorème des déterminants de moments, entrent la fonction ponctuelle σ des polytropes de la Géométrie autour de M_α, et la fonction tangentielle Σ du polytrope de la Géométrie dans M^α; d'autre part, M^β et M_β sont M^0 et M_0, et le premier moment disparaît : il reste seulement la puissance $(N-1)^{\text{ième}}$ du moment de M_α et M^α.

Alors, en appliquant le théorème à un système de N éléments $M_{\alpha+1}$ ayant M_α inscrit commun, et à chacun des systèmes de N éléments $M^{\alpha+1}$ ayant M^α circonscrit commun que fournit la figure de référence, on introduira à la puissance $N-1$ les coordonnées de l'élément M_α; on pourra donc obtenir ces coordonnées par des radicaux d'indice $n-1$ en fonction de σ, et la relation entre les coordonnées de l'élément M_α fera connaître la fonction ponctuelle σ de N éléments $M_{\alpha+1}$ en fonction de leurs coordonnées. C'est ainsi que, en Géométrie ordinaire, on pourrait évaluer le sinus d'un trièdre en coordonnées tétraédriques par des radicaux carrés.

De même, on pourra évaluer la fonction tangentielle Σ de N éléments $M^{\alpha+1}$ ayant M^α circonscrit commun; on aura, par exemple, l'expression de la quantité $\left(\frac{S}{R}\right)$ pour un triangle en coordonnées tétraédriques.

157. Théorème des déterminants de comoments. — Si l'on considère P éléments $M_{\alpha+1}$ ayant un élément M_α inscrit commun, P autres éléments $M_{\alpha+1}$ ayant aussi un M_α inscrit commun, le déterminant des comoments donnera lieu à un théorème analogue au précédent; et l'on aura un théorème corrélatif en considérant deux systèmes de P éléments $M^{\alpha+1}$ ayant un M^α circonscrit commun. Pour $P=2$, ces deux théorèmes se simplifient.

Dans le cas particulier où les deux éléments M_α sont identiques, leur comoment est égal à 1 et l'on obtient le théorème qui, en Géométrie autour de M_α, joue le rôle du théorème des déterminants de γ en Géométrie générale. De même, etc.

158. **Explication de déterminants nuls.** — Le carré de la fonction ponctuelle de P éléments $M_{\alpha+1}$ ayant un M_α inscrit commun, et qui déterminent par conséquent un élément $M_{\alpha+P}$, est donné par un déterminant d'ordre P dont les éléments sont des comoments ou des expressions ψ (n° 59); on peut encore l'écrire sous la forme d'un déterminant analogue au dernier déterminant du n° 38. Ces déterminants sont nuls lorsque l'élément inscrit M_α est conjugué de lui-même, et aussi lorsque l'élément circonscrit $M_{\alpha+P}$ est conjugué de lui-même : on en rendrait compte facilement (n° 39). On généraliserait les remarques précédentes en considérant le théorème des déterminants de comoments, comme on a dit au n° 62 qu'on pourrait généraliser les considérations indiquées au n° 39.

159. Pour $P = 2$, le carré de la fonction ponctuelle ou du moment réduit de deux éléments M_p^q qui ont M_{p-1} inscrit commun, M^{q-1} circonscrit commun, donne lieu à des remarques relatives à l'équation aux Δ^2 principaux. Si l'on reprend les considérations du n° 118 pour deux éléments M_p^q etc. (il faut faire $P = 1$ dans le n° 118), on voit que le carré du moment réduit ou de la fonction ponctuelle est nul dans deux cas : par exemple, dans l'espace réel, pour deux droites qui se coupent, le carré de la fonction ponctuelle est nul lorsque le point commun aux deux droites appartient à la quadrique des points doubles, et lorsque le plan des deux droites est tangent à la quadrique des plans doubles. D'ailleurs, en se bornant à ce cas particulier, on a

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \psi\left(\frac{x}{\eta}, \frac{x}{\eta}\right) & \psi\left(\frac{x}{\eta}, \frac{\xi}{\eta}\right) \\ \psi\left(\frac{\xi}{\eta}, \frac{x}{\eta}\right) & \psi\left(\frac{\xi}{\eta}, \frac{\xi}{\eta}\right) \end{vmatrix},$$

et aussi

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{x^{12}}{\eta^{12}} & . & . & . \\ 0 & 0 & \frac{\xi^{12}}{\eta^{12}} & . & . & . \\ \underline{x}^{12} & \underline{\xi}^{12} & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix};$$

et l'on vérifierait que ces déterminants sont nuls dans les deux cas qu'on vient de signaler.

Si l'on considère deux droites concourantes $M_2 \mathfrak{M}_2$, deux autres droites concourantes $N_2 \mathfrak{N}_2$, les points de concours étant M, N, les plans communs étant mn, la méthode du n° 118 généralisée donne pour la valeur du produit $\Delta . \Delta'$. comoment (MN). comoment (mn) l'expression suivante dans laquelle on a accentué les coordonnées des droites N_2 et $\mathfrak{N}_2$

$$\left\| \begin{matrix} \underline{x}_{\prime}^{12} \cdots\cdots \\ \\ \underline{\xi}_{\prime}^{12} \cdots\cdots \end{matrix} \right\| . \left\| \begin{matrix} \dfrac{x^{12}}{\eta^{12}} \cdots\cdots \\ \dfrac{\xi^{12}}{\eta^{12}} \cdots\cdots \end{matrix} \right\| ;$$

ou encore le second déterminant ci-dessus dans lequel les deux premières colonnes seraient accentuées, ou bien le premier déterminant ci-dessus dans lequel les secondes coordonnées seraient accentuées; on en déduit la formule

$$\Delta . \Delta' . \mathrm{com}(M . N) . \mathrm{com}(m . n) = \begin{vmatrix} \mathrm{com}(M_2 N_2) & \mathrm{com}(M_2 \mathfrak{N}_2) \\ \mathrm{com}(\mathfrak{M}_2 N_2) & \mathrm{com}(\mathfrak{M}_2 \mathfrak{N}_2) \end{vmatrix}$$

qui rentre dans le théorème des déterminants des comoments. On rendrait compte des cas où les déterminants sont nuls.

On pourrait, dans les déterminants du huitième ordre qu'on vient de rencontrer, ne laisser que des coordonnées relatives à une figure de référence.

Le calcul précédent fait bien comprendre comment les déterminants considérés sont nuls dans deux cas, puisqu'on les obtient par la multiplication de deux formules; peut-être pourrait-on donner une explication analogue lorsque P est quelconque.



CHAPITRE IX.

CORRÉLATION; POLARITÉ RÉCIPROQUE. GRANDEUR DES FIGURES.

§ I.

160. **Corrélation quelconque.** — On a défini au nº 18 la corrélation initiale, et c'est cette corrélation que l'on a considérée jusqu'ici. On pourrait maintenant définir une corrélation quelconque, en se donnant à volonté le polytrope transformé du polytrope de référence : on aurait deux équationnelles doubles S′ et s'; étant donnés deux points, en considérant les deux points d'intersection du rayon qui les joint avec l'équationnelle S′, on aurait un rapport anharmonique qui permettrait de définir la pseudo-distance de deux points dans la corrélation considérée; on aurait de même le pseudo-angle de deux tropes; on définirait ensuite le paramètre d'un rayon ou d'un axe, on aurait le σ de deux points et le Σ de deux tropes, et l'on arriverait au Δ d'un point ou d'un trope; on serait alors en mesure de faire voir que les formules de la corrélation initiale s'appliquent à une corrélation quelconque.

On verrait en particulier que le rapport anharmonique de quatre points sur un rayon, ou de quatre tropes passant par un axe, conserve la même expression, quelle que soit la corrélation dans laquelle on l'évalue : c'est là un fait essentiel, attendu que la pseudo-distance de deux points dans chaque corrélation et le pseudo-angle de deux tropes sont donnés par des rapports anharmoniques, et que pour la corrélation initiale on est forcé d'évaluer ces rapports anharmoniques dans la corrélation que l'on étudie.

161. **Correspondance P par polaires réciproques.** — Au lieu d'une *corrélation* C′, on peut avoir une *correspondance par polaires réciproques* P. Les deux équationnelles doubles se confondent, et l'on a l'équationnelle directrice. L'élément primitif et l'élément

transformé d'un élément donné sont, au sens près, un même élément qui est l'élément polaire du premier par rapport à l'équationnelle directrice : les coordonnées de l'un sont égales aux coordonnées de l'autre multipliées par $(-1)^{pq}$. Comme vérification, étant donné un élément M_p^q dont le primitif et le transformé sont L_q^p et N_q^p, si l'on écrit que le moment de deux éléments L et M est égal au moment de leurs transformées M et N, on a

$$(L, M) = (M, N) = (-1)^{pq}(M, L),$$

ce qui est exact. On a un exemple frappant dans la rotation d'un angle droit autour d'un point fixe, les côtés étant dirigés : l'angle étant dans la position LOM, on peut l'amener dans la position MON. ON étant de sens contraire à OL; on peut encore faire glisser un quadrant sur une circonférence de cercle.

L'homographie de points conjugués sur chaque rayon, qui conduit au paramètre θ, est ici une involution; il en est de même de l'homographie de tropes autour d'un axe, qui conduit au paramètre Θ. Le paramètre d'un rayon est $\frac{\pi}{2}$, le paramètre d'un axe est $\frac{\pi}{2}$ (on peut revoir à ce propos le n° 87); le σ de deux points est un sinus de pseudo-distance, le Σ de deux tropes est un sinus de pseudo-angle; les γ et les Γ sont des cosinus.

Le comoment de deux éléments est indépendant de l'ordre dans lequel on les prend. Le déterminant s_0^2 du n° 3 est un déterminant symétrique, etc.

162. J'indiquerai ici une formule intéressante pour la correspondance par polaires réciproques. Soient les quatre points A, B, C, D : ils donnent lieu aux trois systèmes (DA, BC), (DB, CA), (DC, AB); on a

$$\begin{vmatrix} \gamma(DB) & \gamma(DC) \\ \gamma(AB) & \gamma(AC) \end{vmatrix} = \sigma(D, A)\,\sigma(B, C).\gamma(DA, BC)$$

et deux formules analogues; en ajoutant les trois formules, on a

$$\sigma(D, A)\,\sigma(B, C).\gamma(DA, BC) + \ldots + \ldots = 0.$$

On aurait une relation analogue pour quatre tropes.

163. Les Δ principaux dans une correspondance P. — Lorsque la corrélation est une correspondance par polaires réciproques, les Δ principaux relatifs à deux éléments $M_p^q M_\pi^\varkappa$ sont les maxima et les minima de la quantité $\Delta(M\mu)$, M étant un point de l'un des éléments et μ un trope passant par l'autre; ou encore les maxima et les minima de $\sigma(M\mathfrak{M})$ ou de $\Sigma(m\mu)$. C'est ainsi que, en Géométrie ordinaire, le moment de deux droites est le produit de leur plus courte distance par le sinus de l'angle maximum que font deux plans passant par ces deux droites. Ajoutons que, comme il s'agit ici de maxima et de minima relatifs à plusieurs variables indépendantes, ces mots doivent être pris dans un sens particulier : la fonction $z=f(x,y)$ étant représentée par une surface en coordonnées cartésiennes, il y a maximum ou minimum pour z aux points où le plan tangent est parallèle au plan des xy, même lorsque, les courbures principales en ce point étant de sens contraires, le plan tangent traverse la surface; il y a alors maximum ou minimum pour z quand on chemine sur la surface le long d'une courbe non tangente à une asymptote de l'indicatrice du point.

En effet, si l'on se reporte au n° 102, on a

$$\begin{aligned}\Delta(M\mu) = {} & k_{,}k'\Delta(M_{,}\mu') + k_{,}k''\Delta(M_{,}\mu'') + \ldots \\ & + k_{,,}k'\Delta(M_{,,}\mu') + k_{,,}k''\Delta(M_{,,}\mu'') + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

avec les relations

$$\begin{aligned} 1 &= k_{,}^2 + k_{,,}^2 + \ldots + 2k_{,}k_{,,}\cos M_{,}M_{,,} + \ldots \\ 1 &= k'^2 + k''^2 + \ldots + 2k'k''\cos\mu'\mu'' + \ldots. \end{aligned}$$

Pour les maxima et les minima de Δ, on a, en faisant varier d'abord les coefficients $k_{,}$,

$$\frac{k'\Delta(M_{,}\mu') + k''\Delta(M_{,}\mu'') + \ldots}{k_{,} + k_{,,}\cos(M_{,}M_{,,}) + \ldots} = \ldots = \frac{\Delta}{1};$$

et des relations analogues en faisant varier les coefficients k'. Or, ces relations sont identiques à celles du n° 102, parce que les γ et le Γ sont ici des cosinus.

164. Correspondance métrique M. — En conservant une correspondance par polaires réciproques, on peut choisir une équa-

tionnelle particulière, que nous appellerons l'*équationnelle de l'infini,* et appeler *distance de deux points* la quantité qui était dans le cas précédent la pseudo-distance, et *angle de deux tropes* la quantité qui était le pseudo-angle; la correspondance par polaires réciproques relative à cette équationnelle est alors la correspondance *métrique* M. Pour prendre la distance d'un point M à un trope μ, on prend par exemple le pôle $\mathfrak{N}$ du trope par rapport à l'équationnelle, le rayon $\mathfrak{N}$M rencontre le trope en un point $\mathfrak{M}$, et l'on a la distance M$\mathfrak{M}$.

Dans l'espace réel, en Géométrie non euclidienne, il existe sur chaque droite ou rayon deux points à l'infini qui sont les points où la droite rencontre la sphère de l'infini, et il passe par chaque droite ou axe deux plans isotropes (de coordonnées infinies) qui sont les plans tangents à la sphère de l'infini menés par la droite. Si l'on mène par une droite un plan m et le plan perpendiculaire n', les plans m et les plans n' forment une involution dont les plans doubles sont les plans isotropes de la droite, et l'on a le paramètre $\frac{\pi}{2}$; je laisse de côté le fait corrélatif, en faisant observer que la réalité des points à l'infini sur une droite, et l'imaginarité des plans isotropes passant par une droite, amènent une différence physique entre les propriétés de la droite considérée comme rayon et celles de la droite considérée comme axe : en Géométrie sphérique, le rayon (grand cercle) et l'axe (système de deux points) sont entièrement comparables, et l'involution sur chaque grand cercle de deux points séparés par un quadrant a ses points doubles imaginaires, absolument comme l'involution autour de chaque point de deux grands cercles perpendiculaires a ses éléments doubles imaginaires.

165. **Figures égales.** — Dans une corrélation C, lorsqu'on donne les γ des points d'un polytrope considérés deux à deux, en tenant compte de l'ordre, on a $n(n-1)$ quantités qui déterminent le polytrope en position.

Relativement à la correspondance métrique, si l'on donne, pour un polytrope, les cosinus des distances des sommets considérés deux à deux, on a seulement $\frac{n(n-1)}{2}$ données, et nous dirons que le polytrope est défini en grandeur : sa position dépend de

$\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres ; les cosinus des angles des faces considérées deux à deux sont connus et, d'une manière générale, toutes les quantités considérées au Chapitre I pour le polytrope de référence sont déterminées. On peut définir un polytrope en donnant les cosinus des angles des faces considérées deux à deux, comme on définit un triangle sphérique en donnant ses angles.

On peut donner les $(n-1)$ arêtes issues d'un point, avec le polytrope d'ordre $n-1$ que forment ces arêtes : le nombre de ces données est $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$; c'est ainsi qu'un tétraèdre peut être donné par trois arêtes et le trièdre qu'elles forment ; à cela se rattache la première formule du n° **152**. On aurait des données corrélatives.

Cette remarque en amène une autre. Pour définir un tétraèdre, on peut donner trois arêtes issues d'un point et le trièdre de ces arêtes ; or, ce trièdre lui-même est un polytrope en Géométrie autour d'un point, et, pour le définir, on peut donner deux angles et le dièdre compris : on peut donc définir un tétraèdre en donnant trois arêtes DC, DB, DA, deux angles (DC, DB) (DC, DA), et un dièdre (DCB, DCA). D'une manière générale, pour définir un polytrope dans l'hyperespace, on peut donner $(n-1)$ arêtes, $(n-2)$ angles de rayons ayant un point commun, etc. ; le nombre de ces données est $\frac{n(n-1)}{2}$. On a pour un tétraèdre la formule

$$6V = DC.DB.DA \times \sin(DC, DB).\sin(DC, DA) \times \sin(DCB, DCA),$$

et l'on aurait une formule analogue pour un polytrope. On pourrait prendre des données corrélatives.

166. Deux figures sont égales lorsque, rapportées à deux polytropes égaux, elles ont mêmes coordonnées pour les points correspondants. Le nombre des paramètres de déplacement d'une figure est $\frac{n(n-1)}{2}$. On peut faire sur ces paramètres de déplacement des remarques qui doivent être précédées de notions sur les coordonnées polaires.

167. Coordonnées polaires. — Par analogie avec les coordon-

nées polaires, planes et dans l'espace, on peut rapporter les figures de l'hyperespace à une figure de référence comprenant un point M_1, un rayon M_2 passant par le point, etc., un axe M_{n-2} et un trope M_{n-1} passant par l'axe; les coordonnées polaires d'un point M sont : le moment $M_1 M$, le moment réduit du rayon M_2 avec le rayon $M_1 M$, le moment réduit de l'élément M_3 avec l'élément $M_2 M$, etc. On aurait, de même, les coordonnées polaires d'un trope m; ce sont, en renversant l'ordre des éléments de référence, le moment $M^1 m$, le moment réduit de l'axe M^2 avec l'axe $M^2 m$, etc.

168. **Paramètres de déplacement des figures.** — Pour fixer la position d'une figure, on peut fixer la position de la figure de référence à laquelle elle est rapportée. En coordonnées polaires ponctuelles, on a donc à fixer un point, un rayon passant par ce point, etc.; en coordonnées polaires tangentielles, on a à fixer un trope, un axe de ce trope, etc.; on reconnaît ainsi que le nombre des paramètres de déplacement d'une figure est

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

comme on l'a dit déjà.

On peut remarquer que la figure de référence des coordonnées polaires n'a aucun paramètre de grandeur, mais seulement des paramètres de déplacement.

169. **Équationnelles remarquables.** — Pour certaines classes de figures, le nombre des paramètres de déplacement est moindre.

En Géométrie ordinaire, l'équation d'une surface en coordonnées polaires est $f(\rho, \theta, \varphi)=0$; le nombre des paramètres de déplacement est $3+2+1$, pour fixer le point, l'axe, le plan de référence. Si les coordonnées ρ et θ entrent seules dans l'équation, on a une surface de révolution : le nombre des paramètres de déplacement est trois, pour fixer le point et l'axe de référence; et en effet, pour une surface de révolution, on a à fixer un point de l'axe et l'axe, et le paramètre de déplacement autour de l'axe fait défaut. Si la coordonnée ρ entre seule dans l'équation, on a un système de sphères concentriques : le nombre des paramètres de déplacement est trois, pour fixer le point de référence; et en effet, pour un système de sphères concentriques, on a à fixer le

centre commun, et les paramètres de déplacement autour d'un point font défaut. [Je ferai, à ce sujet, la remarque suivante : en Géométrie analytique à deux dimensions, lorsqu'on écrit qu'une conique du genre ellipse a ses axes égaux, si l'on exige que la conique soit réelle, on a une condition qui se décompose en deux, et la conique est un cercle dépendant de trois paramètres; cela tient à ce que le cercle n'a que deux paramètres de déplacement dans le plan, le paramètre d'orientation faisant défaut. On aurait des faits analogues pour une quadrique dont deux axes deviennent égaux, pour une quadrique dont les trois axes deviennent égaux.]

Considérons maintenant l'hyperespace. Si, dans l'équation d'une équationnelle en coordonnées polaires ponctuelles, les q coordonnées relatives aux éléments de référence $M_1 \ldots M_q$ entrent seules, on a une équationnelle pour laquelle le nombre des paramètres de déplacement est $(n-1)+\ldots+p$, ces paramètres déterminant la figure de référence; les paramètres de déplacement autour d'un élément M_q^p font défaut, leur nombre est $\frac{p(p-1)}{2}$, et le nombre des paramètres de déplacement de la figure est $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}$. L'élément M_q^p de référence $(q \leqq n-2)$ est lié à l'équationnelle considérée; en Géométrie ordinaire, c'est l'axe de la surface de révolution, ou le centre commun des sphères concentriques.

En appliquant des considérations analogues aux coordonnées polaires tangentielles, on aurait les mêmes équationnelles particulières. Soit d'abord la Géométrie sphérique : la figure de référence pour les coordonnées polaires ponctuelles étant formée du point A et du grand cercle b passent en A, prenons pour les coordonnées polaires tangentielles une figure de référence composée du grand cercle a dont le pôle est A, et du point B qui est le pôle de b; soient ρ et θ les coordonnées ponctuelles d'un point M, et soient ψ et δ les coordonnées tangentielles d'un grand cercle m : ψ est l'angle du grand cercle m avec le grand cercle a, δ est l'arc du grand cercle a compris entre le point B et le point où ce grand cercle est rencontré par le grand cercle m; l'équation $\rho=$ const. représente un petit cercle de pôle A, et l'équation tangentielle de ce petit cercle est $\psi=$ const; en sorte que, dans ce cas, les équations ponctuelles $\rho=$ const. et les équations tangen-

tielles $\psi =$ const. représentent les mêmes courbes. Dans l'hyperespace, l'équationnelle considérée en coordonnées polaires ponctuelles étant rapportée aux éléments $M_1 \ldots M_q^p$, on la rapportera en coordonnées polaires tangentielles à des éléments $M^1 \ldots M_p^q$ dont le dernier sera l'élément polaire de M_q^p par rapport à l'équationnelle directrice; les paramètres de déplacement dans l'élément M_p^q feront défaut. (Pour les surfaces de révolution dans l'espace réel, M_q^p est l'axe, M_p^q est la droite à l'infini dans les plans des parallèles.)

170. On peut définir directement les équationnelles remarquables que l'on vient d'obtenir, et voir quel est le rôle des deux éléments $M_q^p M_p^q$.

Nous ferons d'abord quelques remarques sur les enveloppes en général. Nous admettrons la notion d'une équationnelle comme lieu de points ou comme enveloppe de tropes : le premier point de vue menant au trope tangent, le second point de vue menant au point de contact. Soit maintenant une équationnelle variable dépendant de k paramètres; si l'on prend une position E de l'équationnelle, et k positions infiniment voisines, les points communs vérifient $k+1$ conditions : lorsque E varie, avec k paramètres, le lieu de ces points est une équationnelle qui est l'enveloppe de l'équationnelle mobile; ou bien, si l'on prend une position E de l'équationnelle, et k positions infiniment voisines, les tropes communs vérifient $k+1$ conditions, etc.

Cela posé, reprenons d'abord les équationnelles du n° 88 : ce sont, pour la correspondance métrique, les équationnelles du second degré circonscrites à l'équationnelle de l'infini; le trope des points de contact étant a, le point commun aux tropes de contact étant A, pôle de a par rapport à l'équationnelle directrice, on a $\sigma(\mathrm{AM}) =$ const., $\Sigma(am) =$ const.; il en résulte que ces équationnelles font partie de celles que l'on a considérées au n° 169, et correspondent au cas $q = 1$: l'élément M_q^p est le point A, l'élément M_p^q est le trope a; elles jouent le rôle de la sphère en Géométrie ordinaire, et leurs paramètres de déplacement sont en nombre $n-1$; les paramètres de déplacement autour du point A, ou dans le trope a, font défaut. Nous donnerons à ces équationnelles le nom d'*équationnelles cycliques;* le point A

sera le centre, et AM sera le rayon; A est le pôle du trope a qui est le trope de contact avec l'équationnelle de l'infini. On doit observer que les points communs à deux équationnelles cycliques $S+\alpha^2=0$, $S+\beta^2=0$ sont les points d'intersection de la première avec les deux tropes $\alpha\pm\beta=0$; les points communs à trois équationnelles cycliques $S+\alpha^2=0$, $S+\beta^2=0$, $S+\gamma^2=0$ sont les points d'intersection de la première avec les quatre axes d'intersection des deux couples de tropes $\alpha\pm\beta=0$, $\alpha\pm\gamma=0$; les points communs à des équationnelles cycliques, en nombre q, sont les points d'intersection de l'une d'entre elles avec des éléments M_{p+1}^{q-1} en nombre 2^{q-1}. De même, les tropes tangents communs à des équationnelles cycliques, en nombre q, sont les tropes tangents à l'une d'elles menés par des éléments M_{q-1}^{p+1} en nombre 2^{q-1}.

Considérons maintenant l'enveloppe d'une équationnelle cyclique dont le centre décrit un élément M_q^p, et dont le rayon est fonction de la position du centre; le trope de contact de cette équationnelle avec l'équationnelle de l'infini passe par un élément fixe M_p^q qui est l'élément polaire de M_q^p par rapport à l'équationnelle de l'infini. Cette équationnelle dépend de $q-1$ paramètres, et pour prendre l'enveloppe on prend q positions infiniment voisines; les points communs, points de contact de l'équationnelle cyclique avec l'enveloppe, sont les points où un élément M_{p+1}^{q-1} coupe l'une des équationnelles : en effet, l'équationnelle mobile étant $S+\alpha^2=0$, avec $q-1$ paramètres dans α, pour avoir l'enveloppe on élimine ces paramètres entre les q équations

$$\begin{aligned} S+\alpha^2&=0,\\ 2\alpha\alpha'&=0,\\ 2\alpha\alpha''&=0,\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en représentant par $\alpha', \alpha'', \ldots$ les dérivées partielles de α par rapport aux paramètres; on trouve ainsi comme enveloppe, outre l'équationnelle de l'infini $S=0$, le lieu des points $S+\alpha^2=0$, $\alpha'=0$, $\alpha''=0, \ldots$, qui sont les intersections de $S+\alpha^2=0$ avec un élément M_{p+1}^{q-1}; cet élément variable passe d'ailleurs par l'élément M_p^q par lequel passe constamment le trope α. De même, les tropes tangents communs aux q positions infiniment voisines

de l'équationnelle cyclique, tropes de contact de l'équationnelle cyclique avec l'enveloppe, sont les tropes tangents à l'une des équationnelles menés par un élément M_{q-1}^{p+1} qui se meut dans l'élément M_q^p lieu du centre A. Or les équationnelles ainsi obtenues comme enveloppes sont précisément celles que l'on a considérées au n° 169; c'est ainsi qu'une surface de révolution est l'enveloppe d'une sphère : les plans des parallèles passent par une droite fixe rejetée à l'infini, et les sommets des cônes circonscrits à la surface le long de ces parallèles décrivent l'axe de la surface.

171. **Remarque sur le plan de cet Ouvrage.** — On pourrait commencer l'étude de l'Hyperespace par l'étude de la correspondance métrique; on étudierait ensuite la corrélation. Pour éviter des calculs formant double emploi, j'ai abordé immédiatement l'étude de la corrélation; et je pense que la raison essentielle de la possibilité de cette étude immédiate consiste en ce fait que le rapport anharmonique de quatre points sur un rayon, ou de quatre tropes passant par un axe, conserve la même expression, quelle que soit la corrélation dans laquelle on l'évalue; il y a là un élément fondamental et, pour ainsi dire, inattaquable.

§ II.

172. **Remarque sur le nombre des données γ.** — Pour l'étude de la corrélation initiale, et pour l'étude de toute corrélation, les données sont les γ des points de référence 1, 2, ..., n considérés deux à deux : ce sont les quantités $\gamma_{12}, \gamma_{21}, \ldots$; nous ferons une remarque importante sur le nombre de ces données. Les formules de la corrélation générale sont

$$\frac{u_1}{a_1^1 x^1 + a_1^2 x^2 + \ldots} = \frac{u_2}{a_2^1 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots} = \ldots,$$

d'où il résulte qu'une corrélation dépend de $n^2 - 1$ paramètres; en mettant à part les paramètres $a_1^1, a_2^2, \ldots$, le nombre des paramètres peut s'écrire $n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2$. Or, le nombre des données γ est seulement $\frac{n(n-1)}{2} \times 2$, attendu qu'on a

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \ldots = \gamma_{nn} = 1.$$

Il faut en conclure, non pas que nos calculs se rapportent à une corrélation d'une espèce particulière, mais bien que les mêmes calculs se rapportent à différentes corrélations; absolument comme les calculs de la Géométrie sphérique se rapportent à une sphère d'un rayon quelconque, lequel n'apparaît pas dans ces calculs. Et la raison est la même au fond dans les deux cas : en Géométrie sphérique, les arcs sont rapportés à une unité qui d'pend du rayon de la sphère, et dans nos calculs les pseudo-distances $\overline{M\mathfrak{M}}$, les paramètres θ, et les quantités Δ parmi lesquelles sont les coordonnées du point et celles du trope, se rapportent à l'équationnelle double S; c'est là un fait essentiel, qu'on ne doit pas perdre de vue.

173. On peut entrer plus avant dans la question. D'une part, une corrélation peut être déterminée : 1° par l'équationnelle double S qui dépend seulement de $(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres, puisqu'elle ne dépend que des coefficients a_1^1 et des sommes $a_1^2+a_2^1$; 2° par les paramètres θ des $\frac{n(n-1)}{2}$ rayons de référence, lesquels dépendent des différences $a_{12}-a_{21}$; d'autre part, les formules que nous étudions ne dépendent que des données γ_{12}, γ_{21}, .., ou encore elles ne dépendent que des θ ci-dessus et des pseudo-distances $\overline{12}$, ... ou des rapports anharmoniques $(12\Omega\Omega')$...; il en résulte que, les θ étant donnés, toutes les équationnelles S qui donnent les mêmes valeurs aux pseudo-distances $\overline{12}$, ... donnent lieu aux mêmes formules : elles dépendent de $n-1$ paramètres arbitraires. Ainsi, pour une corrélation quelconque, on prendra un polytrope de référence 1, 2, ..., n et l'on se donnera les γ de ses points considérés deux à deux; les $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres θ seront déterminés, ainsi que les $\frac{n(n-1)}{2}$ pseudo-distances telles que $\overline{12}$, ou encore les rapports anharmoniques correspondants relatifs à l'équationnelle double S; on se donnera *à volonté* $(n-1)$ points sur les $(n-1)$ rayons issus d'un sommet de référence, on assujettira l'équationnelle S à passer par ces points, et l'on imaginera qu'elle est alors déterminée de manière à donner aux $\frac{n(n-1)}{2}$ rapports anharmoniques dont il

vient d'être question les valeurs qu'ils doivent avoir : quels que soient les $(n-1)$ points pris sur les rayons, les calculs relatifs à la corrélation définie par l'équationnelle S et par les paramètres θ resteront les mêmes; on pourrait d'ailleurs, la quadrique S étant choisie, au lieu de donner les quantités θ, donner sur chaque rayon le point conjugué de l'une des extrémités.

174. Nous ferons encore la remarque suivante : Un polytrope dépend de $n(n-1)$ paramètres; dans une corrélation donnée, il est entièrement défini par les pseudo-distances des sommets considérés deux à deux, et les paramètres θ des rayons, ou encore par les γ des sommets considérés deux à deux; on peut le définir également par les pseudo-angles des tropes considérés deux à deux, et les paramètres Θ des axes, ou encore par le Γ des tropes considérés deux à deux; on peut enfin le définir par les pseudo-distances des sommets et les pseudo-angles des faces. En particulier, dans le cas de la Géométrie plane, un triangle peut être défini par ses pseudo-côtés et ses pseudo-angles; or, malgré cela, on a les relations

$$\frac{\sigma(\mathrm{BC})}{\Sigma(bc)} = \frac{\sigma(\mathrm{CA})}{\Sigma(ca)} = \frac{\sigma(\mathrm{AB})}{\Sigma(ab)};$$

cela tient à ce que les fonctions σ et Σ dépendent des paramètres θ et Θ.

175. Cas particulier. — Dans une correspondance par polaires réciproques, on pourrait prendre comme figures de référence un polytrope autopolaire, les faces étant transformées des tropes. On aurait alors $\gamma_{12}=0, \ldots, \Gamma^{12}=0, \ldots, h^1=h^2=\ldots=h^n=1$, $\cos(\mathrm{MA}_1)=\underline{u}^1=x^1$, $\cos(ma^1)=\underline{u}_1=u_1$, et les formules avec des x et des $\underline{u}$ deviendraient des formules avec des x seuls :

$$\begin{aligned}\cos(\mathrm{MN}) &= x^1y^1+\ldots,\\ \cos(mn) &= u_1v_1+\ldots,\\ 1 &= (x^1)^2+\ldots,\\ 1 &= (u_1)^2+\ldots;\end{aligned}$$



17817 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.